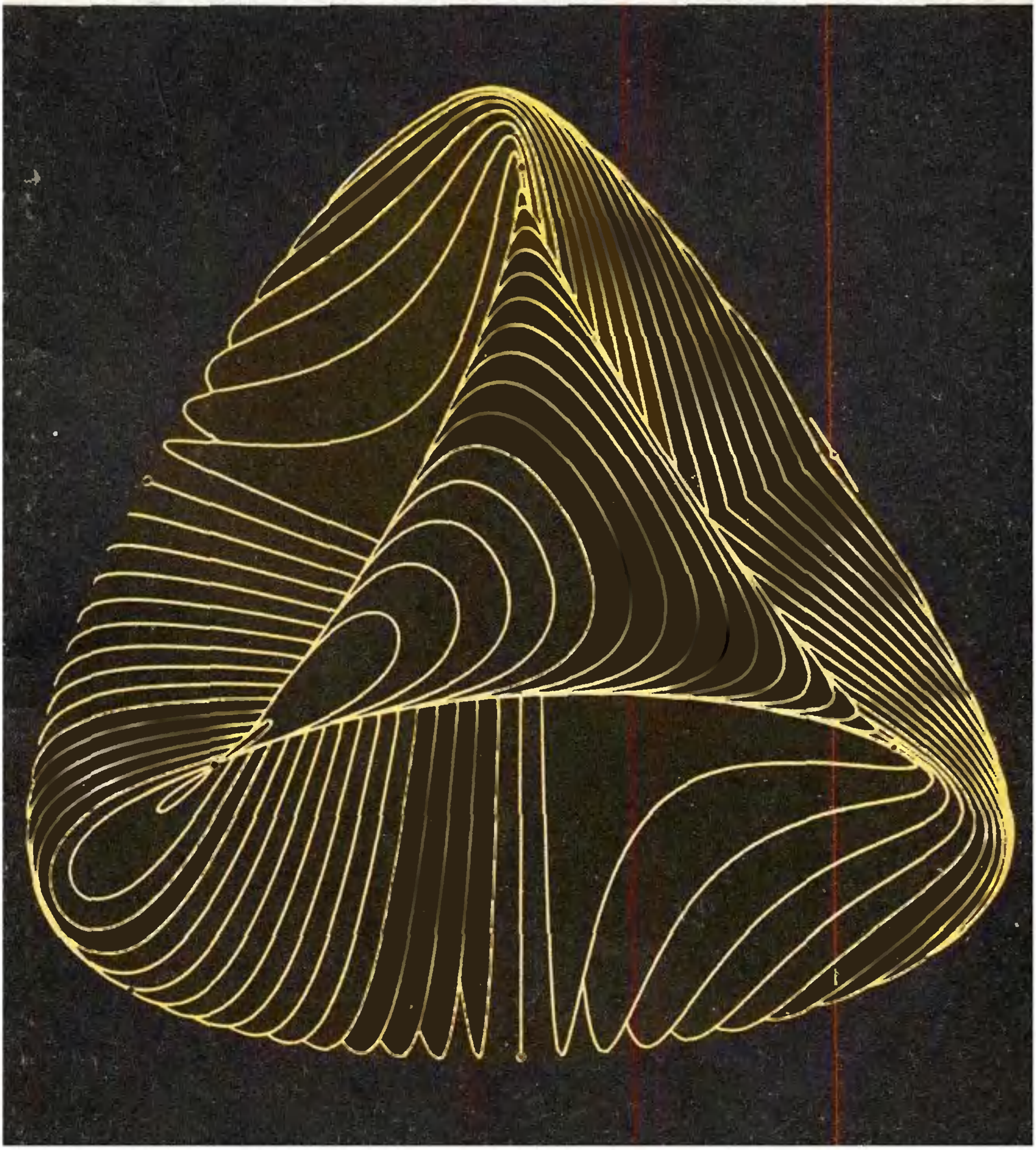
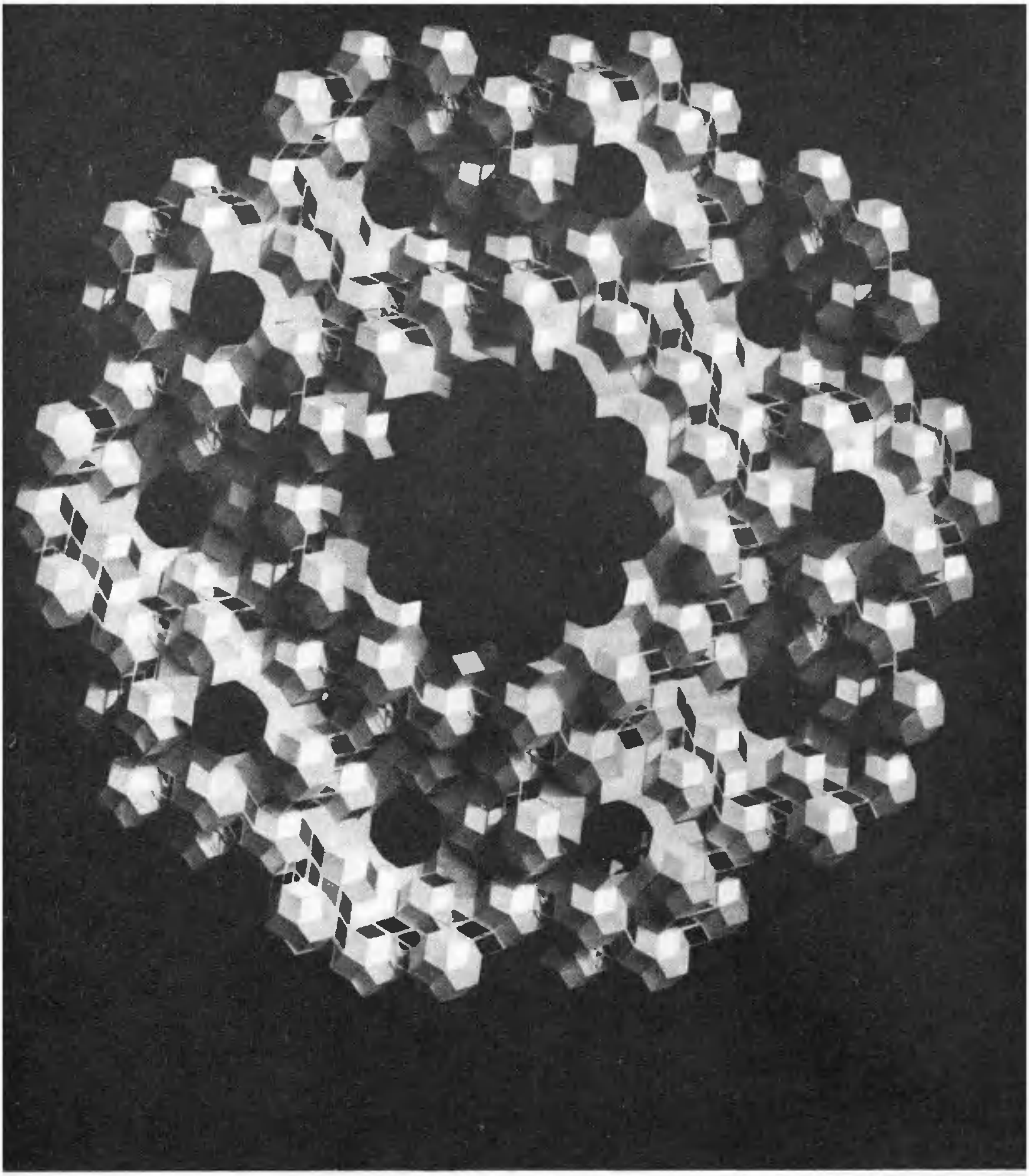
ISSN 0130-2221

Квант

1
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Сложная геометрическая структура, изображенная на обложке, составлена из десяти аналогичных между собой частей. Каждая из них состоит из состыкованных ромбических двадцатигранников и шестигранников (см. фотографию). Ромбические двадцатигранники (их 15 штук в каждой части: 10 — во внешнем кольце, 5 — во внутреннем) строятся следующим образом: берется додекаэдр и на каждое его ребро (их 30) кладется ромб так, чтобы его короткая диагональ совпала с ребром; размеры ромбов (все ромбы одинаковы) и их положения выбраны так, чтобы ромбы состыковывались сторонами, образуя выпуклый тридцатигранник (проверьте, что это возможно!); из тридцатигранника удален «экваториальный пояс» из десяти ромбов; склеивая две оставшиеся «шапочки», получаем наш двадцатигранник.

Шестигранники составлены из ромбов тех же размеров и бывают двух типов (почему?); они образуют сложную сеть «коридоров» между «комнатами»-двадцатигранниками.

Эта структура послужила основой экспериментального архитектурного проекта жилого поселка для Крайнего Севера.

О. Боднар

Основан в 1970 году

Квант

1
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки показана поверхность Штейнера, нарисованная ЭВМ. Подробнее см. с. 45.

В. Лешковцев

Физика в Московском государственном университете

Московский государственный университет (МГУ) недаром носит имя великого русского ученого Михаила Васильевича Ломоносова. Университет был создан 225 лет тому назад по его совету и проекту. «Главное мое основание — писал Ломоносов по поводу этого проекта — чтобы план служил во все будущие годы». Эта надежда сбылась — университет возник и вскоре стал одним из основных очагов русского просвещения и науки. Однако непосредственного участия в деятельности Московского университета Ломоносов не принимал. Учеников в области физики у него не было, поэтому он практически не мог оказать какое-либо влияние на развитие физики в МГУ.

Московский университет был создан по указу императрицы Елизаветы Петровны 12 января 1755 года. Сначала в нем было всего лишь три факультета: философский, юридический и медицинский; на последнем читался курс физики. Только в 1804 году был образован факультет физических и математических наук. Сама жизнь (развитие производства, потребности армии) начала предъявлять требования к подготовке специалистов в этих областях науки.

Еще Петр I, стремясь к развитию отечественной науки, указывал на необходимость не только обучать наукам, но и «производить оные». Но в то время, как в Академию наук приглашались из-за рубежа известные ученые (Эйлер, Бернулли, Ленц и другие), для Московского университета ничего подобного сде-

Вверху изображено здание физического факультета МГУ на Ленинских горах.

лано не было. К тому же научные труды по физике, публиковавшиеся преподавателями за первые полвека его существования, погибли во время пожара 1812 года.

Первым крупным физиком, работавшим в Московском университете, был Александр Григорьевич Столетов. Он отдал университету более 30 лет своей жизни. Столетов был воспитанником Московского университета, который он окончил с отличием в 1860 году. Вскоре его на три года направили за границу, где он продолжил свое образование в лабораториях Берлина, Гейдельберга, Геттингена, Парижа. В эти годы он учился у Гельмгольца, Кирхгофа, Вебера, Магнуса и других крупных ученых.

В 1865 году Столетов вернулся на родину и вскоре начал преподавать физику в университете — деятельность эта продолжалась до последних дней его жизни (он умер в 1896 году). Он первый начал читать курс математической физики. Ценою огромных усилий ему удалось в 1872 году создать первую физическую лабораторию, в которой можно было проводить самостоятельные научные исследования. До этого момента преподаватели университета, в том числе и сам Столетов, проводили научные исследования только в иностранных лабораториях. Столетов основал также первый постоянно действующий научный семинар по проблемам физики, из числа участников которого выросли такие крупные ученые, как Н. А. Умов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский.

Работы Столетова заложили основы теоретической электротехники; они получили широкое международное признание. В 1871 году Столетов начал исследование магнитных свойств железа — основного материала электротехники.

Под действием магнитного поля железо приобретает магнитные свойства — оно становится магнитом. Намагничивание тела I и его магнитная проницаемость μ зависят от величины магнитной индукции намагничивающего поля. Кроме того, эти величины зависят также от формы тела, что весьма осложняет исследования. До Столетова величины I и μ измеряли только на длинных стержнях. Столетов создал новый метод измерения этих величин, позволяющий исключить влияние формы тела и получить закономерности, характеризующие материал, из которого оно сделано. Опираясь на эти закономерности, создатели электрических машин нашли ключ к решению многих практических задач.

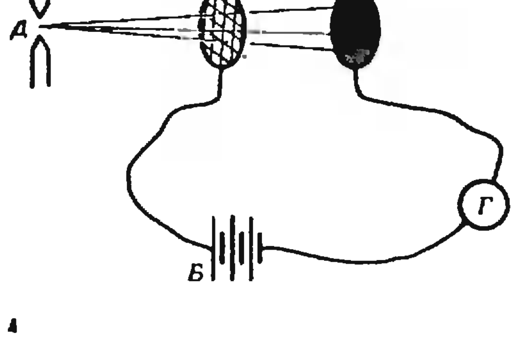
Памятник А. Г. Столетову у входа на физический факультет.

В 1887 году немецкий физик Герц обнаружил загадочную связь между электричеством и светом. Изучая электрический пробой в газах (проскакивание искры между включенными в электрическую цепь электродами), он обнаружил, что облучение электродов ультрафиолетовыми лучами облегчает пробой. Приступив к исследованию этого явления (впоследствии названного фотоэлектрическим эффектом, или сокращенно — фотоэффектом), Столетов создал оригинальную методику, позволившую раскрыть основные закономерности фотоэффекта.

На рисунке приведена схема его экспериментов. В электрическую цепь, состоящую из батареи *Б* и гальванометра *Г*, включены также две металлические пластинки K_1 и K_2, одна из которых сделана в виде сетки. Электрическая дуга *Д* является источником ультрафиолетовых лучей. Освещая ими металлические пластинки, Столетов наблюдал прохождение тока в «разомкнутой» электрической цепи. Теперь мы знаем, что носителями тока служат электроны, которые вырываются квантами ультрафиолетового излучения из металлического катода K_2 и устремляются к аноду K_1.

В результате своих экспериментов Столетов установил характер зависимости силы фототока, текущего по цепи, от напряжения, приложенного к пластинкам. Оказалось, что с увеличением напряжения фототок сначала растет до определенной величины (ее называют током насыщения), после чего остается практически постоянным. Это означает, что все электроны, покинувшие под влиянием света катод K_2, достигают анода K_1 и участвуют в прохождении тока по электрической цепи. Столетов показал также, что сила фототока насыщения пропорциональна световому потоку, падающему на катод, или по-современному — числу падающих на катод квантов света. Законы фотоэффекта, открытые Столетовым, сыграли важную роль в обосновании квантовой теории излучения и нашли много ценных практических применений.

После смерти Столетова созданная им кафедра экспериментальной физики перешла к другому крупному физику Николаю Алексеевичу Умову. Он тоже был воспитанником Московского университета, но, окончив его в 1867 году, более 20 лет преподавал в Одесском университете. В Москву Умов вернулся лишь в 1893 году и проработал в Университете вплоть до 1911 года. Лекции его пользовались необычайно широкой популярностью и собирали множество слушателей, часто даже с других факультетов. Умов был первым физиком-теоретиком в истории нашей страны. Прекрасно владея сложным математическим аппаратом и глубоко разбираясь в принципиальных физических проблемах, он выполнил ряд крупных научных работ в области физики твердого тела, теплофизики, электромагнетизма и земного магнетизма. Остановимся кратко лишь на двух его исследованиях.



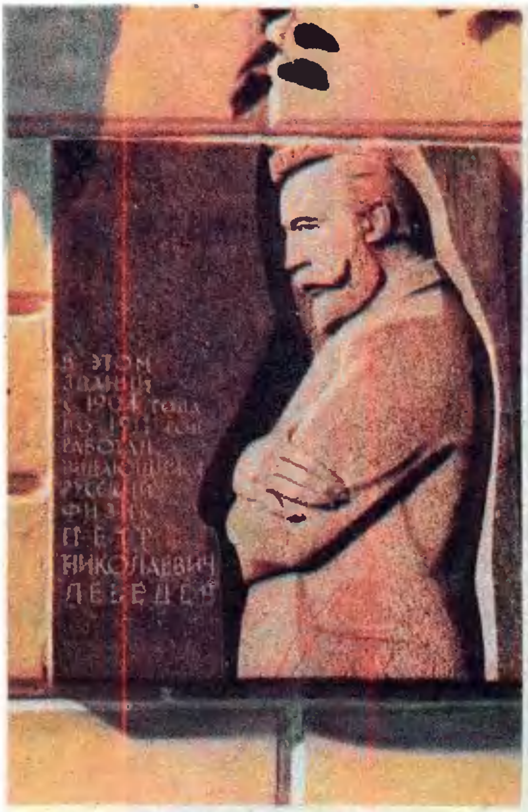
В начале 1874 года Умов опубликовал работу «Уравнения движения энергии в телах». В ней содержится идея о потоке различных видов энергии в разных средах. Умов показал, что многие физические процессы (например, распространение световых волн или упругие колебания в твердом теле) связаны с непрерывным потоком энергии. Он первый ввел понятия плотности энергии, скорости ее распространения, направления потока энергии, дав им строгие физические определения. Исходя из закона сохранения энергии, Умов получил общий закон распространения энергии. Физический смысл этого закона таков: изменение энергии в заданном объеме какой-либо среды за единицу времени равно потоку энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Сегодня эти идеи Умова стали общепринятыми. Но в то время Умов натолкнулся на глубокое непонимание со стороны большинства физиков. Лишь десятью годами позже, в 1884 году, английский физик Пойнтинг опубликовал получившую широкую известность статью о переносе электромагнитной энергии, основные выводы которой совпадали с выводами из более общей теории Умова.

Старое здание физического факультета МГУ на Моховой.

Вторая проблема, исследованная Умовым, о которой мы хотим здесь рассказать, это земной магнетизм. Известно, что Земля является громадным магнитом. Характер магнитного поля Земли весьма непрост, а о происхождении этого поля ученые спорят до сих пор. Формальную математическую теорию земного магнитного поля разработал великий немецкий математик Гаусс. Он вывел формулу, по которой можно вычислить величину магнитной индукции для любой точки на поверхности земного шара. Она представляет собою сумму из 24 слагаемых с постоянными коэффициентами, определяемыми из опыта. Умову впервые удалось раскрыть физический смысл отдельных слагаемых и коэффициентов в формуле Гаусса.

Последним выдающимся физиком, работавшим в Московском университете до Октябрьской революции, был Петр Николаевич Лебедев. Он не был питомцем Московского университета, так как высшее образование получил в Московском высшем техническом училище. Подобно Столетову и Умову, он также совершенствовал свое образование за рубежом — в Страсбурге и Берлине. В 1891 году Лебедев получил степень доктора наук Страсбургского университета. Представленная им к защите работа была посвящена теории диэлектриков и определению диэлектрической проницаемости паров некоторых веществ.

Теория электромагнитных явлений, созданная Максвеллом в середине XIX века, далеко не сразу получила научное признание. За утверждение этой теории активно боролся Столетов. (Он провел серию опытов по точному определению соотношения между коэффициентами, определяющими силу взаимодействия электрических зарядов и силу взаимодействия электрических токов. Согласно теории Максвелла отношение этих коэффициентов равно



Мемориальная доска на здании, где работал П. Н. Лебедев.

скорости света, что и подтвердилось в опытах Столетова.) В этой же борьбе принимал участие и Умов, чья работа о потоке энергии подтверждала и развивала некоторые выводы, вытекающие из теории Максвелла. Конечно, очень важную роль в признании теории Максвелла сыграли опыты Герца, доказавшие существование электромагнитных волн. Но и П. Н. Лебедеву также удалось сделать очень крупный вклад в обоснование этой теории.

Из теории Максвелла следует, что свет, падая на поверхность тела, оказывает на него давление. Однако попытки проверить этот вывод экспериментально, предпринятые несколькими учеными, закончились безуспешно. Они пришли к выводу, что если световое давление и существует, величина его очень мала и перекрывается другими, во много раз более заметными физическими эффектами, неизбежно присутствующими в таких экспериментах. Прежде всего это радиометрический эффект, связанный с тем, что нагреваемое светом тело отдает тепло по-разному с освещенной и неосвещенной сторон. Вторым побочным эффектом, осложняющим эксперимент, является конвекция — возникновение тепловых потоков в нагретом светом воздухе; теплый воздух поднимается вверх, холодный — опускается.

Лебедев первым преодолел все эти трудности. В построенном им приборе достигалась рекордная по тому времени степень разрежения воздуха. Платиновые крылышки, на которые свет поочередно падал то с одной, то с другой стороны, были очень тонкими, что практически исключало влияние радиометрического эффекта. А стеклянный баллон, внутри которого помещалось измерительное устройство, был достаточно больших размеров, что значительно ослабляло влияние конвекционных потоков воздуха. Измеренная Лебедевым величина давления света на легкие платиновые крылышки совпала со значением, вычисленным по теории Максвелла. Эта работа была доложена Лебедевым в Париже на Всемирном съезде физиков в 1900 году и сразу получила всеобщее признание. Выдающийся английский физик Вильям Томсон (лорд Кельвин, чьим именем названа абсолютная шкала температур), узнав о работах Лебедева, сказал знаменитому русскому биологу Клементу Аркадьевичу Тимирязеву: «Вы, может быть, знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами».

В 1909 году Лебедев закончил трехлетние эксперименты по доказательству существования светового давления на газы, потребовавшие еще большей изобретательности. Оказалось, что свет оказывает давление на газы и именно этим объясняется форма кометных хвостов.

Не менее важным итогом деятельности П. Н. Лебедева является создание им первой научной школы физиков в России. Среди его учеников были такие известные впоследствии ученые, как академик П. П. Лазарев, член-корреспондент АН СССР Т. П. Кравец, профессора В. К. Аркадьев, А. Б. Млодзеевский, Н. А. Капцов, К. П. Яковлев. Петр Николаевич был также инициатором создания независимого от университета первого в России Физического института, который сейчас находится в системе Академии наук СССР и носит его имя. К сожалению, Лебедев не дожил до открытия института: сказалось тяжелое заболевание сердца, от которого он умер в 1912 году в возрасте 46 лет.

Первым директором Физического института, открывшегося 1 января 1917 года, был академик П. П. Лазарев. Следуя примеру своего учителя, он объединил вокруг себя большую группу молодых ученых, из числа которых вышли преподаватели МГУ академики С. И. Вавилов, Г. С. Ландсберг и В. В. Шулейкин, профессора Б. В. Ильин, С. Н. Ржевкин, Э. В. Шпольский.

После Октябрьской революции физический факультет МГУ непрерывно развивался и совершенствовался. Очень большую роль в его развитии сыграло создание кафедры теоретической физики, первым руководителем которой был талантливый молодой ученый С. А. Богуславский, приглашенный из Саратова. Проработав в МГУ два года, он умер от туберкулеза. Тогда на его место был приглашен из Одесского университета профессор (а впоследствии академик) Леонид Исаакович Мандельштам, который приехал вместе со своим сотрудником (впоследствии также академиком) Игорем Евгеньевичем Таммом. Оба они были выдающимися советскими учеными, оказавшими большое влияние на развитие всей советской физики. Постепенно уровень преподавания физики в МГУ сравнялся с лучшими зарубежными высшими учебными заведениями.

Недавно мы отмечали в нашем журнале *) 100-летие со дня рождения академика Л. И. Мандельштама. Он создал одну из крупнейших физических школ в нашей стране. Среди его учеников назовем лишь академиков А. А. Андронова, М. А. Леонтовича, И. М. Франка, А. М. Прохорова, членов-корреспондентов АН СССР С. М. Рытова, В. В. Мигулина, профессоров С. Э. Хайкина и Г. С. Горелика. Л. И. Мандельштам внес существенный вклад в целый ряд разделов современной физики — оптику, теорию колебаний, распространение радиоволн, статистическую физику.

Наиболее крупным из числа сделанных им открытий является открытие комбинационного рассеяния света. Если осветить какое-либо тело светом строго определенной длины волны, то и рассеянный этим телом свет будет иметь ту же длину волны. Эта истина давно и надежно была установлена оптиками. Но Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг решили выяснить, а не возникает ли при рассеянии света в кристаллах каких-нибудь новых световых волн, которых нет в падающем на кристалл свете. Для этого они поставили следующий опыт.

Монохроматический свет, полученный от ртутной лампы с помощью фильтра, падал на кристалл максимально чистого и однородного кварца. Свет, рассеянный кристаллом, анализировался при помощи спектрографа. Одна из основных трудностей эксперимента состояла в том, что из общего количества световой энергии, падающей на кристалл, рассеивается лишь около одной десятимиллиардной доли, причем практически весь рассеянный свет по длине волны совпадает с падающим светом. Обнаружить какие-то новые длины волн в отраженном кристаллом свете необычайно трудно.

Тем не менее после чрезвычайно долгой экспозиции Мандельштам и Ландсберг нашли в отраженном свете две дополнительные спектральные линии, симметрично расположенные на равных расстояниях от первичной. Разности между частотами этих линий и частотой падающего света одинаковы и совпадают с частотой внутренних колебаний молекул рассеивающего вещества. Атомы, образующие молекулы, могут совершать колебатель-

*) См. «Квант», 1979, № 7.

Памятник П. Н. Лебедеву у входа на физический факультет.

ные движения. Им соответствуют определенные порции электромагнитной энергии (кванты), которые молекулы могут поглощать или излучать. Если квант падающего света взаимодействует с невозбужденной молекулой, он отдает ей часть своей энергии и она переходит в возбужденное состояние. Оставшаяся часть энергии падающего кванта излучается в виде света с меньшей частотой (большей длиной волны). Его спектральная линия смещена в «красную» сторону спектра. Если же квант падающего света взаимодействует с возбужденной молекулой, он может «отобрать» ее энергию возбуждения. При этом возникает свет с большей частотой (меньшей длиной волны), то есть соответствующая спектральная линия смещается в «синюю» сторону спектра.

В этом явлении физики впервые встретились с прямым взаимодействием света с отдельными молекулами вещества. Недаром Мандельштам называл спектры комбинационного рассеяния света «языком молекул». Изучение таких спектров позволяет обнаруживать присутствие различных молекул в веществе и исследовать взаимодействие атомов в молекулах.

Среди работ другого выдающегося физика-теоретика, преподававшего в МГУ,— Игоря Евгеньевича Тамма — мы остановимся лишь на исследовании природы ядерных сил, выполненном в 1934 году. Как известно, атомные ядра состоят из положительно заряженных протонов и лишенных электрического заряда нейтронов. По законам электростатики протоны должны отталкивать друг друга с огромной силой. Казалось бы, при этом все атомные ядра должны мгновенно разрушаться. В действительности же только очень тяжелые ядра, принадлежащие элементам конца периодической системы Менделеева, сравнительно неустойчивы и превращаются в более легкие ядра путем радиоактивного распада. Что же придает такую прочность атомным ядрам? Оказывается, это результат действия ядерных сил.

Основы современных представлений о природе ядерных сил были заложены И. Е. Таммом. Он первый среди физиков понял, что эти силы должны носить особый, квантовый характер. Взаимодействие электрически заряженных частиц осуществляется путем излучения и поглощения квантов электромагнитной энергии. Тамм предположил, что и ядерные силы реализуются путем обмена какими-то промежуточными частицами — квантами ядерного поля. Допустив, что такими частицами являются электроны, Тамм построил строгую математическую теорию ядерных сил, качественно объясняющую все их основные особенности. Однако оказалось, что эти силы на много порядков меньше их действительного значения. Впоследствии было показано, что квантами ядерного поля являются ранее неизвестные частицы — пи-мезоны, масса которых примерно в 300 раз больше, чем у электрона.

Еще одним выдающимся ученым, активно участвовавшим в работе физического факультета, был академик Сергей Иванович Вавилов. Он руководил кафедрой общей физики. При нем были существенно усовершенствованы общий и специальный физические практикумы, создано много новых лекционных демонстраций.

В середине сороковых годов при физическом факультете МГУ был образован Научно-исследовательский институт ядерной физики, где готовятся специалисты в области физики атомного ядра, элементарных частиц и космических лучей. В это же время возникла и кафедра физики низких температур, первым руководителем которой был А. И. Шальников (ныне академик).

В последние годы на физическом факультете успешно развивались работы по квантовой электронике и нелинейной оптике *). Их возглавлял безвременно скончавшийся талантливый молодой ученый ректор МГУ академик Рэм Викторович Хохлов. Он был представителем второго поколения «мандельштамовцев», получившим прекрасную подготовку в области теории колебаний. Среди выполненных им работ наибольшей известностью пользуется создание параметрических лазеров с плавно изменяющейся частотой излучения.

Обычные лазеры имеют строго фиксированную частоту, а значит, и длину волны излучаемого света. Например, лазер на неодимовом стекле излучает свет с длиной волны 1,06 мкм, а аргоновый газовый лазер — 0,48 мкм. Однако на практике требуются лазерные излучения самых различных частот. Задачу изменения частоты излучения лазерного луча Хохлов решил следующим образом. Он показал, что при высоких интенсивностях света в некоторых веществах происходит «распад» квантов падающего на них лазерного излучения. При этом вместо кванта с энергией $h\nu_0$ возникают два кванта с энергиями $h\nu_1$ и $h\nu_2$, причем $\nu_0=\nu_1+\nu_2$. Соблюдая это условие, можно варьировать частоты ν_1 и ν_2 в широких пределах. Такие генераторы света называются параметрическими.

В разные годы на физическом факультете МГУ работали такие известные советские физики, как академики Л. А. Арцимович, Н. Н. Боголюбов, И. К. Кикоин, Л. Д. Ландау.

Московский университет воспитал много талантливых физиков. Среди его воспитанников ректор МГУ, вице-президент АН СССР академик А. А. Логунов, академик-секретарь отделения ядерной физики М. А. Марков, директор Института кристаллографии АН СССР академик Б. К. Вайнштейн, заместитель директора Института физических проблем АН СССР академик А. С. Боровик-Романов и многие другие известные советские ученые. Нет сомнения, что университет будет успешно решать эту задачу и в будущем.

*) Нелинейная оптика изучает оптические явления, происходящие при очень высокой интенсивности света, создаваемой лазерами. В таких условиях оптические свойства среды (например, показатель преломления) зависят от интенсивности света.

Задачи наших читателей

Производную полезно применять для доказательства неравенств как с одной переменной («Квант», 1979, № 10), так и с несколькими переменными. Вот примеры таких задач, присланные нашими читателями:

Задача 1. Доказать неравенство

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}>\frac{\beta}{\alpha}$$

для чисел α, β, удовлетворяющих соотношениям

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Л. Курляндчик

Задача 2. Доказать неравенство

$$\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\gamma<\frac{25}{16},$$

в котором α, β, γ — углы треугольника.

С. Берколайко

В. Вышенский, Н. Перестюк, А. Самойленко

Поговорим о дифференциальных уравнениях

Если в обычных уравнениях, решаемых в школе, требуется найти численные значения некоторой переменной, то в дифференциальных уравнениях искомой является функция, причем в уравнение входит производная этой функции. С простейшими дифференциальными уравнениями вы знакомы по школьному учебнику. Это уравнение показательного роста (или убывания)

$$y' = ky, \qquad (1)$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, $k \neq 0$ — заданная постоянная («Алгебра и начала анализа 10», п. 110), и уравнение гармонических колебаний

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (2)$$

где y — опять неизвестная функция, $\omega > 0$ — постоянная (там же, п. 80).

В различных областях человеческой деятельности возникают задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Характер этих задач и методику их решения можно описать примерно так. Изучается какой-нибудь процесс — физический, биологический и т. д. Нас интересует изменение во времени какой-то характеристики этого процесса, то есть некоторой величины (температуры, давления, массы и т. п.). Если у нас имеется достаточно много сведений о течении этого процесса, мы можем попытаться построить его м а т е м а т и ч е с к у ю м о д е л ь. Во многих случаях из экспериментальных данных или из физических и прочих законов удается получить информацию о скорости изменения величины $y = y(t)$ в зависимости от времени t, то есть о производной $y' = y'(t)$. Эта информация обычно может быть записана в виде дифференциального уравнения с неизвестной функцией $y = y(t)$. Получающееся уравнение как раз и описывает наш процесс с точки зрения его характеристики y. Отыскав все решения дифференциального уравнения — само по себе это уже чисто математическая задача, мы находим все возможные варианты изменения величины y.

Отметим, что при математическом описании (такое описание называют *моделью*) всегда приходится делать некоторые упрощающие предположения, пренебрегать теми или иными побочными явлениями, принимать «идеальные» условия — одним словом, абстрагироваться от конкретных деталей. Это приводит к известным ограничениям в применимости построенной модели.

Опыт развития различных наук показывает, что многие далекие друг от друга по содержанию задачи приводят к одинаковым или сходным дифференциальным уравнениям. Поэтому естественно разработать методы решения таких уравнений безотносительно к тем задачам, которые привели или могут привести к ним. Этим как раз занимается математическая *теория дифференциальных уравнений*.

Если какая-нибудь задача сводится к дифференциальному уравнению, методы решения которого уже известны, то эту задачу можно считать решенной. В этом случае творческая часть решения заканчивается составлением дифференциального уравнения, второй же этап — отыскание решений уравнения — будет представлять собой хотя и важную, но чисто техническую задачу. Тут имеется полная аналогия с задачами, сводящимися к обычным алгебраическим уравнениям.

В этой статье мы проиллюстрируем сказанное на примере задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям (1) и (2) из школьного курса. Начнем с некоторых напоминаний.

1. Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $y' = ky$ называется *линейным*, поскольку неизвестная функция y и ее производная y' входят в него линейным образом. Как известно из учебника, любое решение этого уравнения записывается в виде

$$y = Ae^{kx}, \qquad (3)$$

где A — произвольная постоянная.

Оказывается, если на координатной плоскости изобразить графики этих решений при всевозможных значениях A, то они покроют всю плоскость, причем через каждую точку плоскости пройдет в точности один из графиков. Плоскость оказывается как бы «сотканной» из графиков $y = Ae^{kx}$ (рис. 1).

Докажем это, для чего найдем среди функций вида (3) все те, графики которых проходят через данную точку $(x_0; y_0)$ координатной плоскости. Для определения постоянной A получаем уравнение

$$Ae^{kx_0} = y_0,$$

которое имеет единственное решение $A = y_0e^{-kx_0}$. Следовательно, через нашу точку проходит один и только один из графиков (3) — это

$$y = (y_0e^{-kx_0})\cdot e^{kx} = y_0e^{k(x-x_0)}. \qquad (4)$$

Полученный нами факт часто формулируют следующим образом: дифференциальное уравнение $y' = ky$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; это решение задается формулой (4).

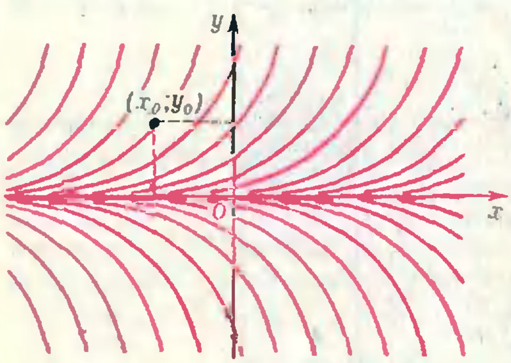


Рис. 1.

Более общее линейное дифференциальное уравнение записывается в виде

$$y' = ky + a, \qquad (5)$$

где a (как и k) — постоянная. Уравнение (5) легко сводится к уже исследованному уравнению (1): если правую часть записать в виде

$$ky + a = k\left(y + \frac{a}{k}\right)$$

(напомним, что мы считаем $k \neq 0$) и обозначить функцию $y + a/k$ через z, то

$$z' = \left(y + \frac{a}{k}\right)' = y' = ky - a = kz.$$

Таким образом, функция $z(x) = y(x) + a/k$ удовлетворяет уравнению $z' = kz$, поэтому $z = Ae^{kx}$, то есть $y + a/k = Ae^{kx}$, откуда

$$y(x) = -\frac{a}{k} + Ae^{kx}. \qquad (6)$$

Значение постоянной A опять-таки однозначно определяется, если задано начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Вот, по существу, и вся математическая теория линейных дифференциальных уравнений первого порядка, то есть уравнений, включающих только первую производную от неизвестной функции.

2. Приложения линейных дифференциальных уравнений

В школьном учебнике рассмотрен ряд процессов, исследование которых сводится к линейным дифференциальным уравнениям, то есть к применению изложенной в п. 1 теории. Это процессы радиоактивного распада, роста народонаселения и теплообмена. Мы рассмотрим еще три примера из других областей науки. Напомним, что главное для нас — свести задачу к дифференциальному уравнению.

(А) Модель роста популяций бактерий. Пусть $N(t)$ — численность размножающейся популяции бактерий в момент времени t. При идеальных условиях приращение численности $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ за время от t до $t+\Delta t$ для многих видов бактерий можно считать примерно пропорциональным количеству имеющихся в момент времени t бактерий; кроме того, при малых Δt приращение $\Delta N(t)$ должно быть примерно пропорционально Δt. Таким образом, при сделанных допущениях можно записать

$$\Delta N(t) \approx kN(t)\Delta t,$$

где $k>0$ — коэффициент, зависящий от вида бактерий. Итак,

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx kN(t).$$

Отвлекаясь от того, что численность может измеряться только целыми числами, будем считать, что $N(t)$ изменяется во времени непрерывно. Учитывая, что последнее равенство должно быть тем точнее, чем меньше Δt (обдумайте), после перехода в нем к пределу при Δt, стремящемся к 0, получим дифференциальное уравнение вида (1):

$$N'(t) = kN(t).$$

Следовательно (см. п. 1),

$$N(t) = Ae^{kt},$$

так что численность популяции возрастает по показательному закону. Если при этом известна начальная численность популяции, то есть начальное условие $N(0)=N_0$, то, следуя формуле (4), можно записать

$$N(t) = N_0e^{kt}.$$

(Б) Свободное падение с трением (модель парашюта). Пусть тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты, причем наряду с силой тяжести $F_т = mg$ на него действует направленная противоположно направлению скорости сила вязкого трения, пропорциональная величине скорости: $F_{тр} = -\alpha v$, где $\alpha>0$ — коэффициент трения. Определим зависимость скорости от времени.

В данном случае дифференциальное уравнение получается сразу из второго закона Ньютона: $ma = F = F_т + F_{тр}$, то есть $mv' = mg - \alpha v$. Разделив обе части на m, опять приходим к линейному дифференциальному уравнению, но на этот раз вида (5):

$$v' = -\frac{\alpha}{m}v + g.$$

Из (6)

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + Ae^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

В случае, когда $v(0)=0$, находим $A = -\frac{mg}{\alpha}$ и

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

При свободном падении без трения ($v'=g$) величина скорости возрастает линейно: $v(t)=gt$. При наличии же вязкого трения скорость, возрастая, тем не менее стремится к постоянной: при возрастании t величина $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ стремится к 0, поэтому $v(t)$ стремится к предельному значению $v_{пр} = mg/\alpha$ (график величины скорости изображен на рис. 2).

(В) Барометрическая формула. Хорошо известно, что чем выше, тем воздух разреженнее — атмосферное давление с высотой уменьшается. Попробуем определить зависимость $p=p(h)$ давления p от высоты над уровнем моря h.

Напомним, что за величину атмосферного давления принимается вес вертикального столба воздуха с пло-

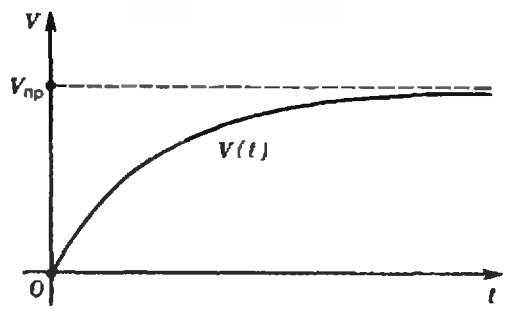


Рис. 2.

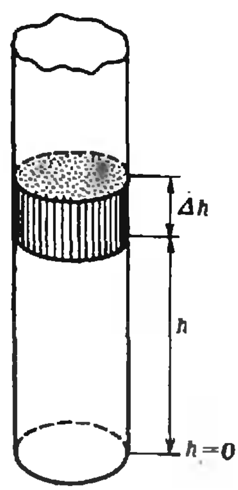


Рис. 3.

щадью сечения $S=1$ см^2. Следовательно, разность

$$p(h)-p(h+\Delta h)=-\Delta p(h)$$

численно равна весу столбика воздуха от высоты h до высоты $h+\Delta h$ (рис. 3), то есть

$$-\Delta p(h)=\Delta mg,$$

где Δm — масса этого столбика. Объем столбика равен $\Delta V=S\Delta h=\Delta h$, поэтому, если средняя плотность воздуха в столбике равна $\rho_{ср}$, то $\Delta m=\rho_{ср}\Delta h$, откуда $-\Delta p(h)=g\rho_{ср}\Delta h$ и, наконец,

$$\frac{\Delta p(h)}{\Delta h}=-g\rho_{ср}.$$

Обозначим плотность воздуха на высоте h через $\rho(h)$; тогда при Δh, стремящемся к 0, средняя плотность $\rho_{ср}$ стремится к $\rho(h)$, и из последнего соотношения мы получаем дифференциальное уравнение

$$p'(h)=-g\rho(h),$$

в котором, однако, функция $\rho(h)$ тоже неизвестна.

Предположим теперь, что температура воздуха одна и та же во всех слоях атмосферы. Тогда из закона Бойля — Мариотта или из уравнения газового состояния легко вывести, что давление пропорционально плотности*):

$$p(h)=b\rho(h).$$

Из этого и предыдущего равенств получаем окончательное дифференциальное уравнение

$$p'(h)=-\frac{g}{b}p(h)$$

— оно снова имеет вид (1)! Применяя теорию из п. 1, находим

$$p(h)=p_0e^{-\frac{g}{b}h},$$

где p_0 — атмосферное давление на уровне моря, то есть при $h=0$.

Итак, давление убывает с высотой по показательному закону, в соответствии с полученной так называемой *барометрической формулой*. Полученная нами формула «отказывает» при высотах, сравнимых по величине с радиусом Земли. И связано это не только с тем, что мы пренебрегли изменением температуры с высотой, но и с изменением ускорения свободного падения.

Отметим, что в данном случае дифференциальное уравнение описывает не физический процесс, а просто изменение одной физической величины (p) в зависимости от другой (h).

*) $pV=RT$, откуда $p=\frac{RT}{V}=\frac{RT}{M}\times\frac{M}{V}=b\rho$, где $b=\frac{RT}{M}$; R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса газа.

3. О гармонических колебаниях

Остановимся теперь на втором из изучаемых в школе дифференциальных уравнений — на уравнении гармонических колебаний

$$y''=-\omega^2y. \qquad (2)$$

Как известно из школьного курса, любое решение этого уравнения записывается в виде

$$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi), \qquad (7)$$

где A и φ — произвольные постоянные, причем можно считать, что $A>0$, $\varphi\in[0;\ 2\pi[$. При этих ограничениях постоянные A и φ однозначно определяются начальными условиями, которых в данном случае нужно уже два: $y(t_0)=y_0$ и $y'(t_0)=v_0$.

Заметим, что в данном случае через каждую точку $(t_0;\ y_0)$ координатной плоскости проходит бесконечно много графиков вида (7). Однако график определяется однозначно, если задать в данной точке еще и касательную к графику (объясните). Связано это с тем, что уравнение (2) второго порядка, то есть в него входит вторая производная искомой функции.

Про величину y, меняющуюся во времени по закону (7), говорят, что она совершает *гармонические колебания с частотой* ω. Важно отметить, что частота не зависит от начальных условий, а определяется только коэффициентом в исходном уравнении.

Уравнения вида (2) встречаются при описании многих колебательных

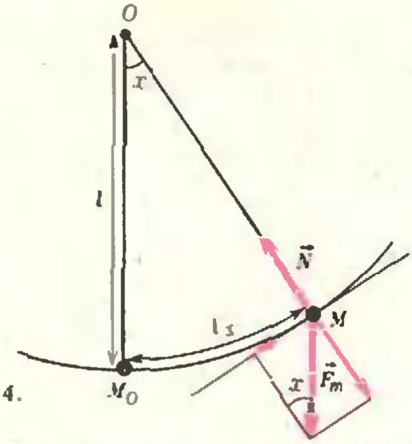


Рис. 4.

систем, причем не только механических. В учебнике рассмотрен пример колебаний шарика на пружинке: *если* масса шарика m, коэффициент жесткости пружинки k, смещение шарика от положения равновесия x, то по второму закону Ньютона $mx'' = -kx$, откуда $x'' = -\omega^2 x$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Разберем еще пример.

Малые колебания маятника. Пусть шарик массы m закреплен на конце M невесомого стержня OM, подвешенного шарнирно в точке O так, что получается качающийся в одной плоскости маятник (рис. 4). Отклонение маятника OM от положения равновесия OM_0 удобно измерять величиной x угла M_0OM, взятой в радианах.

На шарик действуют две силы: направленная вертикально вниз сила тяжести $F_т = -mg$ и направленная по радиусу MO сила реакции стержня N.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на касательную:

$$m(lx)'' = -mg\sin x, \text{ то есть}$$

$$x'' = -\frac{g}{l}\sin x$$

Будем рассматривать только малые колебания маятника, то есть считать величину x *малой*. *Тогда* $\sin x$ можно заменить на x (вспомните, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

— «Алгебра и начала анализа 10», п. 78) и от полученного дифференциального уравнения мы приходим к уравнению гармонических колебаний

$$x'' = -\frac{g}{l}x, \text{ или } x'' = -\omega^2 x,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Следовательно, при малых отклонениях от положения равновесия колебания маятника будут почти гармоническими, с частотой $\omega = \sqrt{g/l}$, не зависящей от массы m и от начальных условий, лишь бы x_0 и v_0 были достаточно малыми.

Конечно, все многообразие природных процессов и явлений не сводится только к уравнениям двух разнообразных типов. Мир дифференциальных уравнений богат почти настолько же, насколько богат реальный мир. Опыт науки показывает, что использование дифференциальных уравнений в качестве математических моделей очень плодотворно — конечно, если *при этом не* забывать об ограниченной области применения любого рода моделей.

Упражнения и задачи

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = -2y + 4$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 5$.

2. Имеется некоторое количество радиоактивного вещества. Известно, что через 30 дней распадается 50% этого вещества. Через сколько дней останется 1% от начального количества вещества?

3. В среду с постоянной температурой 20° поместили тело, нагретое до 100°. Через 10 минут температура тела понизилась до 60°. Через какое время температура тела станет равной 25°?

(**Указание** к задачам 2 и 3. Воспользуйтесь примерами 1 и 3 из п. 110 учебника.)

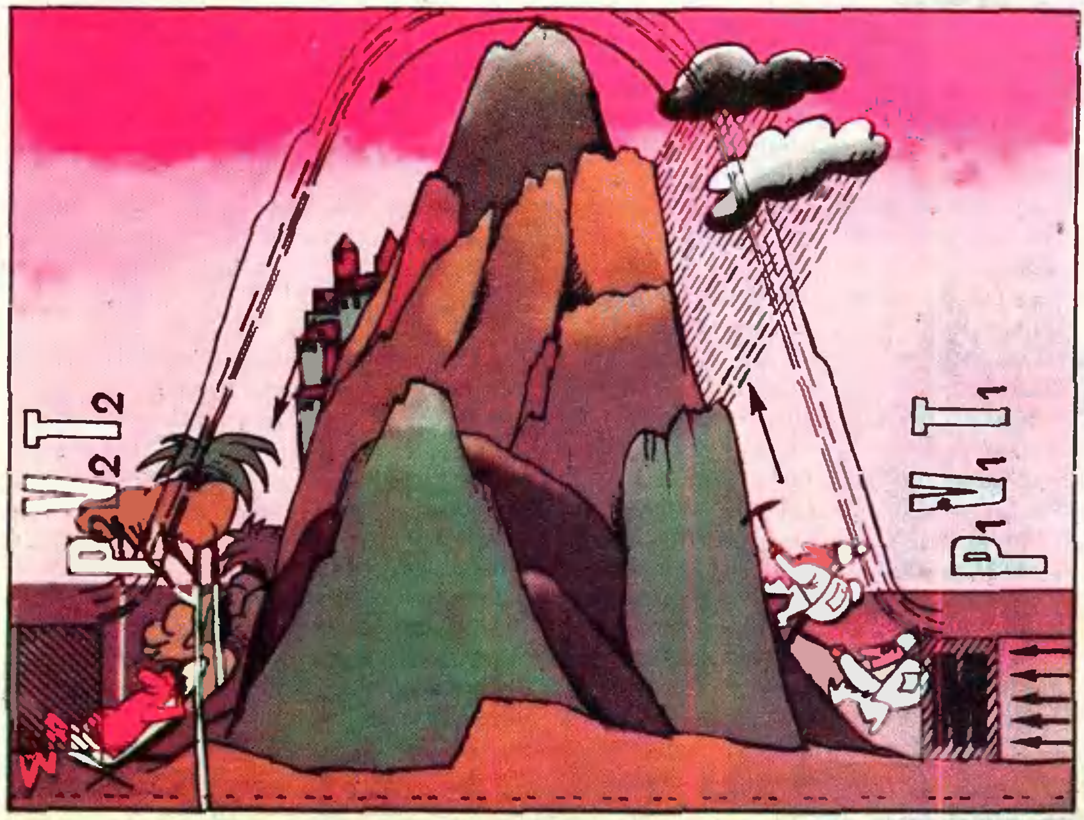
4. Через 12 часов после начала опыта численность некоторой популяции бактерий возросла в три раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток?

5. Значение постоянной b в барометрической формуле для обычного воздуха равно $7{,}7 \cdot 10^4$ м²/с². На какую высоту нужно подняться для того, чтобы давление уменьшилось вдвое?

6. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а ее скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

7. Девочка качается на качелях. Максимальное отклонение от положения равновесия равно 1 м, максимальное ускорение — 1 м/с². Считая колебания гармоническими, найдите их период. Определите высоту качелей.

8. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 y + a$ ($\omega > 0$ и a — постоянные).



И. Воробьев

Гора и ветер

— Завтра будет славная погода! — сказал я. Штабс-капитан не отвечал ни слова и указал мне пальцем на высокую гору, поднимающуюся прямо против нас.
— Что ж это? — спросил я.
— Гуд-гора.
— Ну так что ж?
— Посмотрите, как курится.
И в самом деле, Гуд-гора курилась; по бокам ее ползали легкие струйки облаков, а на вершине лежала черная туча, такая черная, что на темном небе она казалась пятном.

М. Ю. Лермонтов.
Герой нашего времени

Путешественник, пересекающий горный хребет в направлении ветра — с подветренной стороны на наветренную, сразу заметит перемену погоды. Поднимаясь к вершине, он окажется в облачности, а то его еще и захватит ливень или снегопад; за перевалом же — безоблачно и ветер теплый и сухой. Такой ветер называют фёном. Почему происходит это резкое изменение погоды? Как осуществляется «подогрев» воздуха? Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, что произойдет, если на пути влажного ветра окажется высокий горный хребет.

«Столкнувшись» с горой, поток воздуха начинает «взбираться» по склону. При этом любая выделенная масса воздуха переходит в область более низкого давления. Происходит увеличение объема, занимаемого этой массой. В первом приближении можно пренебречь теплообменом между отдельными массами воздуха и считать процесс расширения адиабатным. В таком случае работа совершается за счет убыли внутренней энергии воздуха. А это означает, что температура воздуха понижается.

Посмотрим, что происходит с влажностью воздуха по мере подъема на гору. Как известно, давление, при котором происходит насыщение паров, уменьшается с понижением температуры. Так что чем выше в гору, тем бóльшая часть влаги, содержащейся в воздухе, конденсируется. Образуется множество капелек, висящих в воздухе,— туман или облако.

Процесс конденсации происходит с выделением тепла парообразования. И тепло это не малое — на килограмм образовавшейся из пара воды выделяется около $2{,}5 \cdot 10^6$ Дж при температуре 18°C. За счет этого тепловыделения температура у влажного воздуха уменьшается при подъеме медленнее, чем у сухого. Если б облака вместе с воздухом перевалили через хребет, не потеряв ни капли воды, то в дальнейшем при спуске по наветренному склону и увеличении температуры воздуха вода снова бы испарилась, а на это затратилось бы как раз ранее выделившееся тепло. Воздух у подножья с наветренной стороны стал бы иметь ту же температуру и влажность, что и у подножья с подветренной стороны хребта.

Но если ветер влажный, а хребет достаточно высокий, то значительная доля воды оседает с туманом или выпадает с дождем и снегом. Опускается уже подсушенный воздух, у которого температура при спуске растет быстрее, чем она падала у влажного воздуха при подъеме. (Хребет должен быть высоким, чтобы понижение температуры воздуха с подъемом оказалось достаточным для конденсации.) Поэтому на одной и той же высоте температура воздуха с наветренной стороны выше, чем с подветренной.

Оценим теперь количественно разницу температур. Рассмотрим изогнутый слой воздуха, у которого боковая поверхность следует направлению скорости ветра, а торцы находятся по разные стороны хребта. Спустя небольшое время некоторая масса воздуха M этого слоя покинет объем V_1 с подветренной стороны у подножья горы, где температура T_1, а давление p_1. С подветренной же стороны воздух, опускаясь, займет новый объем V_2 при температуре T_2 и давлении p_2. (Мы будем считать, что в каждом фиксированном месте температура воздуха, давление, скорость ветра остаются со временем неизменными. В частности, это означает, что через любое сечение слоя за одно и то же время проходит одна и та же масса воздуха.)

Внутренняя энергия одного моля одноатомного газа с температурой T равна, как известно, $\frac{3}{2}RT$. Воздух состоит в основном из двухатомных молекул азота и кислорода. Для двухатомного газа внутренняя энергия одного моля равна $\frac{5}{2}RT$.

Изменение внутренней энергии выделенного нами слоя воздуха равно

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

Рассчитаем теперь работу, совершенную против сил внешнего давления. Спустившийся на наветренной стороне воздух вытеснил из объема V_2 ранее здесь находившийся воздух с давлением p_2, совершив положительную работу p_2V_2; на подветренной же стороне воздух покинул объем V_1 при давлении p_1, совершив отрицательную работу $-p_1V_1$. Полная же работа равна

$$A = p_2V_2 - p_1V_1.$$

С помощью уравнения состояния для идеального газа $\left(pV = \frac{M}{\mu}RT\right)$ выразим работу через температуры T_2 и T_1:

$$A = \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

(Так как объемы V_1 и V_2 находятся на одной и той же высоте, потенциальная энергия воздуха в конечном счете не меняется.)

Будем считать, что гора настолько высока, что при подъеме воздуха на подветренной стороне почти вся влага конденсируется и выпадает в виде дождя. Если масса выпавших осадков Δm, то тепло Q, выделившееся при конденсации, равно $\lambda\Delta m$ (λ — удельная теплота парообразования).

В конечном счете именно это тепло Q и идет на изменение внутренней энергии ΔU воздуха и на совершение работы A:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (*)$$

Оценим величину Q. Удельная теплота парообразования слабо зависит от температуры, и мы будем считать ее постоянной. Пусть влажность воздуха с подветренной стороны такова, что при давлении воздуха p_1 давление водяных паров равно p. С массой M воздуха, занимающего объем V_1, приходит масса Δm водяных паров. Согласно уравнению состояния

$$pV_1=\frac{\Delta m}{\mu_0}RT_1,\quad p_1V_1=\frac{M}{\mu}RT_1$$

(μ_0 — молярная масса воды), откуда

$$\Delta m=M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}.$$

Таким образом, $Q=\lambda M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}$.

(В предыдущих наших рассуждениях мы считали, что вся масса M воздуха из объема V_1 переваливает через хребет, то есть игнорировали изменение массы за счет выпадающих осадков. Полученное выражение для Δm показывает, что такое упрощение допустимо: $\mu_0=18$ г/моль, $\mu=29$ г/моль, а $p\ll p_1$ (например, если влажность воздуха 50%, то при температуре 18°С и давлении $p_1=10^5$ Па давление водяных паров $p\approx0{,}01\cdot10^5$ Па), поэтому $\Delta m/M\ll1$).

Запишем теперь в окончательном виде выражение (*):

$$\lambda M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}=$$

$$=\frac{5}{2}\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)+\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda\mu_0\frac{p}{p_1}=\frac{7}{2}R(T_2-T_1).$$

Отсюда находим выражение для разности температур:

$$T_2-T_1=\frac{2}{7}\frac{\lambda\mu_0 p}{Rp_1}.$$

Подставляя $p_1=10^5$ Па, $p=0{,}01\times10^5$ Па, $\lambda=2{,}5\cdot10^6$ Дж/кг, $R=8{,}3\cdot10^3$ Дж/(кмоль · град), $\mu_0=18$ кг/кмоль, получим $T_2-T_1\approx15$ град! Вот какова разница температур на подветренной и наветренной сторонах горы.

Жители горных мест и альпинисты подтверждают правильность этой оценки.

В чем дело?

В некоторой школе, в некотором классе решали з а д а ч у: *найти все значения параметра a, при которых уравнение*

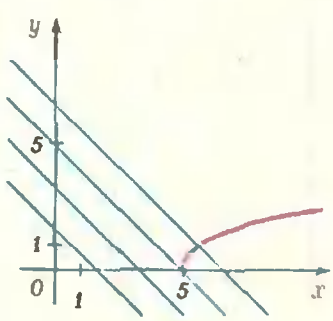
$$\sqrt{x-5}=a-x \qquad (1)$$

не имеет решений.

Сначала все хотели действовать, что называется, «в лоб»: решив уравнение (1), найти все значения параметра a, при которых оно и м е е т решения; тогда о с т а л ь н ы е действительные числа явились бы ответом задачи. Но это была бы длинная канитель, и все обрадовались, когда Федя Крестиков предложил графическое решение: «Функция $\sqrt{x-5}$ — это половина параболы. Выражение $a-x$ задает семейство линейных функций. Видно (см. рисунок), что прямые этого семейства пересекаются с параболой $\sqrt{x-5}$ тогда и только тогда, когда $a\geqslant5$. Значит, ответ в задаче: $a<5$».

Все были довольны, но вдруг раздался голос Васи Пуликова: «А ведь задачка-то устная!». Его попросили объясниться, и сказал Вася вот что: «Из левой части уравнения (1) видно, что если оно имеет решение, то $x\geqslant5$. Из правой части видно, что если (1) имеет решение, то $a-x\geqslant0$ или $a\geqslant x$. Значит, если уравнение (1) имеет решение, то $a\geqslant5$. На уроке математики нам говорили, что теорема „Если A, то B" равносильна теореме "Если не верно B, то не верно A"*). Значит, если $a<5$, то уравнение (1) не имеет решений. А это и есть ответ». И выдержав в почтительно наступившей тишине многозначительную паузу, он добавил: «Я думаю, что мой способ применим и тогда, когда графический не годится».

*) Если вам этого не говорили, читатель, попробуйте доказать это сами. Можете также прочитать это в «Кванте», 1975, № 2, с. 25.



На следующий день к доске снова попросился Крестиков. И вот что он сказал: «Я попробовал решить Васиным способом аналогичную задачу для уравнения

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x-4}=$$
$$=a-x. \qquad (2)$$

Здесь как раз график вряд ли поможет. И вот что получилось. Сначала все шло так же, как и во вчерашнем уравнении: $x\geqslant5$, $a\geqslant x$, значит, $a\geqslant5$; следовательно, при $a<5$ уравнение (2) решений не имеет. И только я обрадовался, как заметил, что при $a=5$ оно тоже решений не имеет*). Где же это значение параметра потерялось при Васином способе?». Сказал и сел на место.

А мы стали думать: если Вася прав, то как быть с примером Крестикова? А если неправ, то почему вчера у него получился верный ответ?»

В чем дело?

В. Рыжик

*) Сообразите, почему.

История о том, как Галилей открыл законы движения

С. Гиндикин

Первые основы динамики были заложены Галилеем. Действие сил до него рассматривали исключительно в случае их равновесия; и хотя ускоренное движение свободно падающих тел и криволинейное движение брошенных тел также приписывали постоянно действующей силе тяжести, но никому не удалось установить законов указанного обыденного явления, зависящего от столь простой причины. Галилей первый сделал этот шаг и открыл новую и безграничную область для развития механики. Это открытие... составляет теперь наиболее значительную и непререкаемую часть заслуг этого великого человека. В самом деле, чтобы открыть спутники Юпитера, фазы Венеры, солнечные пятна и т. д., требуется только телескоп и наблюдательность, но нужен исключительный гений, чтобы установить законы природы на явлениях, которые всегда были у всех перед глазами и тем не менее ускользали от внимания философов.

Лагранж

Пролог

Винченцо Галилей, известный во Флоренции музыкант, долго размышлял над тем, какое поприще выбрать для своего старшего сына Галилео. Сын, безусловно, был способен к музыке, но отец предпочитал что-нибудь более надежное. В 1581 году, когда Галилео исполнилось семнадцать лет, чаша весов склонилась в сторону медицины. Винченцо понимал, что расходы по обучению будут велики, зато будущее сына будет обеспечено. Местом обучения был выбран Пизанский университет, быть может, несколько провинциальный, но хорошо знакомый Винченцо. Он долго жил в Пизе, там же родился Галилео.

Путь к профессии врача был нелегок. Перед тем как приступить к изучению медицины, надо было выучить, а точнее — вызубрить, философию Аристотеля. В его учении говорится буквально обо всем. По мнению Галилея, «нет, кажется, ни одного достойного внимания явления, мимо которого он (Аристотель) прошел бы, не коснувшись его». Философия Аристотеля в то время преподавалась в чудовищной форме: в виде набора высказываний, считавшихся истинами в последней инстанции, лишенных мотивировок и доказательств. О несогласии с Аристотелем не могло быть и речи — за это грозила каторга.

Более всего интересует Галилея то, что пишет Аристотель о физике окружающего мира, но он не хочет слепо верить каждому слову великого философа: «Сам Аристотель научил меня удовлетворять свой разум только тем, в чем убеждают меня рассуждения, а не только авторитет учителя». Он читает и других авторов, среди которых наибольшее впечатление на него производят Архимед и Евклид.

Тайны движения

Из всего, что происходит в окружающем мире, наибольший интерес Галилея вызывали разнообразные движения. Он по крупицам собирает все, что написано о движении у древних, но с сожалением констатирует: «В природе нет ничего древнее движения, но именно относительно него написано весьма мало значительного». А вопросы возникают у пытливого юноши на каждом шагу...

Однажды Галилей был в церкви, и его внимание привлекло раскачивающееся паникадило — большая церковная люстра. Он обратил внимание на то, что паникадило раскачивается неравномерно, по-разному проходя крутые и пологие участки. В какой-то момент Галилео показалось, что качания стали угасать, но время, уходящее на одно качание, при этом не уменьшалось. Он уже не может отвлечься от своих размышлений, он должен немедленно проверить свое предположение. Он, разумеется, не имеет возможности осуществить достоверную проверку, но «грубую прикидку» (он любил это выражение) должен сделать немедленно. Где нам, людям двадцатого века, когда даже многие читатели «Кванта для младших школьников» имеют наручные часы с секундной стрелкой, понять трудности, которые пришлось преодолеть Галилею. Для оценки времени ему пришлось пользоваться «биением собственного пульса (не зря он изучал медицину!) да темпом музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалой для себя пользой».

Вернувшись домой, Галилей при помощи товарища провел эксперименты с шарами, подвешенными на нити, и окончательно убедился, что его предположение правильно. Так, судя по рассказу Вивиани, ученика и биографа Галилея, была открыта независимость периода колебания маятника от величины (амплитуды) размаха. Впрочем, мы должны предупредить читателя, что о молодости Галилея сведений немного и они не слишком достоверны; в частности, многими оспариваются рассказы Вивиани. Но одно несомненно: на основе сделанного юным Галилеем открытия были созданы маятниковые часы — первые часы, которые позволяли долго измерять время с хорошей точностью.

Занятия медициной шли не очень успешно, хотя Галилео стремился оправдать надежды и затраты отца. Все же в 1585 году он возвращается во Флоренцию, не получив диплома доктора. Во Флоренции Галилей продолжает заниматься математикой и физикой, вначале втайне от отца, а потом при его согласии. У Галилео появляются контакты с учеными, в том числе с маркизом Гвидо Убальдо дель Монте. Благодаря поддержке последнего тосканский герцог Фердинандо Медичи в 1589 году назначил Галилея профессором математики Пизанско-

Портрет Галилея. Гравюра XVII века.

го университета. В Пизе Галилей находился до переезда в 1592 году в Падую. Восемнадцать лет, прожитых в Падуе, Галилей считал самым счастливым периодом в своей жизни. С 1610 года и до конца жизни он — «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского Козимо II Медичи». В апреле 1611 года Галилей стал членом Академии Линчиев (рысьеглазых), основанной незадолго до этого Федерико Чези, маркизом Монтичелли. С тех пор все свои труды Галилей подписывал «Галилео Галилей Линчео».

Свободное падение

Что касается научных интересов Галилея, то его по-прежнему интересуют движения и, прежде всего, свободное падение тел, одно из самых распространенных естественных движений. Как и полагалось в это время, начать нужно с того, что по этому поводу утверждал Аристотель. Мнение последнего сводилось к двум аксиомам: скорости падающих тел пропорциональны их весу и обратно пропорциональны «густоте среды». Очевидные сложности возникали со вторым утверждением: получалось, что в пустоте, «густота» которой равна нулю, скорость падения должна быть бесконечной. На это Аристотель добавлял, что в природе пустоты не бывает («природа боится пустоты»).

В 1585 году Галилей получил возможность ознакомиться с недавно вышедшим трактатом Бенедетти, который позволил себе не согласиться и с первым утверждением Аристотеля. И вот в чем дело. Пусть имеются два тела — тяжелое и легкое (рис. 1); первое должно падать быстрее. Теперь соединим их. Естественно предположить, что легкое тело притормозит тяжелое и скорость падения станет промежуточной между скоростями падения составляющих тел. Но по Аристотелю скорость должна стать больше, чем скорость каждого тела. С продумывания работы Бенедетти Галилей начинает свои размышления. Но рассуждениям не очень верили, и, по словам Вивиани, «он доказывал это неоднократными экспериментами, производившимися с высоты Пизанской башни в присутствии других лекторов, философов и всей ученой братии». Галилея по сей день часто рисуют кидающим камни с Пизанской башни.

Еще большее внимание Галилея привлекло другое наблюдение Бенедетти, что скорость свободного падения увеличивается по мере дви-

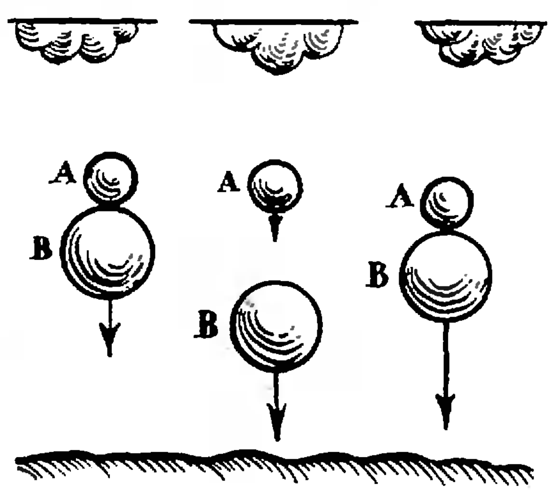


Рис. 1.

жения тела. И Галилей решает найти математически точное описание этого изменения скорости. Здесь следует сказать, что первоначально Галилей видел свою задачу в том, чтобы математизировать физику Аристотеля: «Философия написана в величайшей книге, которая постоянно открыта нашим глазам (я говорю о Вселенной); но нельзя ее понять, не научившись сперва понимать язык и различать знаки, которыми она написана. Написана же она языком математическим, и знаки ее суть треугольники, круги и другие математические фигуры». Однако скоро стало ясно, что математизация требует систематического пересмотра всех фактов.

Как же найти закон изменения скорости свободного падения? Эксперимент только начинал входить в практику научного исследования. Для Аристотеля и его последователей он считался лишним и недостойным занятием как при установлении истины, так и при ее проверке. Галилей мог бы попытаться проделать серию экспериментов со свободно падающими телами, провести тщательные измерения и искать закономерность, которая их объясняет. Так современник Галилея Кеплер, обрабатывая многочисленные наблюдения Тихо Браге, обнаружил, что планеты движутся по эллипсам. Но Галилей выбирает другой путь. Он решает вначале угадать закон из общих соображений, а уже затем проверить его экспериментально. Раньше никто так не поступал, но постепенно такой план исследований станет одним из ведущих при установлении научных истин.

Теперь о том, как Галилей попытался угадать закон. Он решает, что природа «стремится применять во всех своих приспособлениях самые простые и легкие средства», а значит, и закон нарастания скорости должен происходить «в самой простой и ясной для всякого форме». Но раз скорость растет с ростом пройденного пути, то что может быть проще предположения о том, что скорость пропорциональна пути: $v=cs$, c — постоянное число. Это предположение испугало его по-

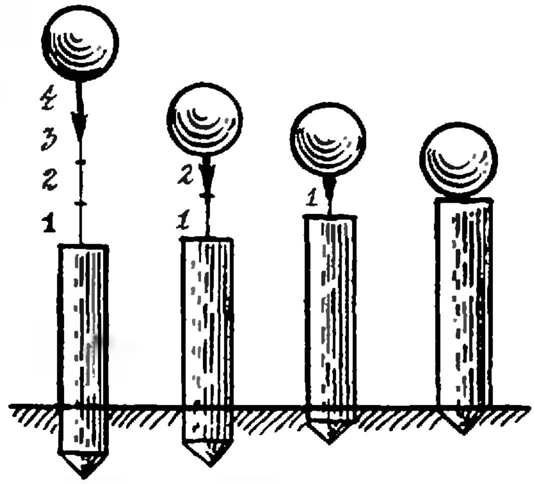


Рис. 2.

началу: ведь получается, что падение начинается с нулевой скоростью, а кажется, что скорость с самого начала велика. Но вот какое рассуждение убедило его, что противоречия нет (рис. 2): «Если груз, падающий на сваю с высоты четырех локтей, вгоняет последнюю в землю приблизительно на четыре дюйма,— при падении с высоты двух локтей он вгоняет ее в землю меньше и, конечно, еще меньше при падении с высоты одного локтя или одной пяди, и когда, наконец, груз падает с высоты не более толщины пальца, то производит ли он на сваю больше действия, чем если бы он был положен без всякого удара? Еще меньшим и совершенно незаметным будет действие груза, поднятого на толщину листа. Так как действие удара находится в зависимости от скорости ударяющего тела, то кто может сомневаться в том, что движение чрезвычайно медленно и скорость минимальна, если действие удара совершенно незаметно?»

Галилей долго исследовал различные следствия из сделанного предположения и неожиданно обнаружил, что по такому закону движение вообще происходить не может! Давайте и мы попытаемся понять, в чем дело. Коэффициент пропорциональности c зависит от выбора единицы времени. Будем считать для простоты, что $c=1$, путь измеряется в метрах, а время в секундах. Тогда во все моменты времени $v=s$.

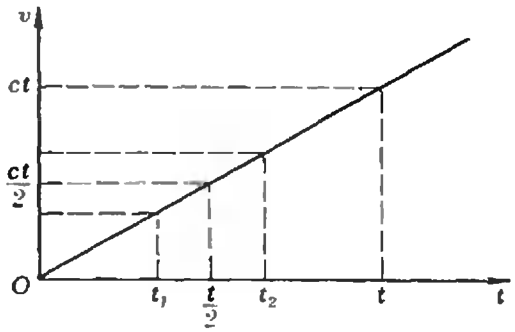


Рис. 3.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии 1 м от начала O. Прикинем, через какое время от начала движения тело окажется в этой точке. В точке A скорость равна 1 м/с. Возьмем точку A_1, лежащую посередине между началом O и A. На отрезке A_1A мгновенная скорость будет меньше 1 м/с, и на отрезок длиной 1/2 м потребуется больше 1/2 с. Возьмем теперь точку A_2 — посередине между O и A_1. На отрезке A_1A_2 мгновенная скорость будет меньше 1/2 м/с (все точки находятся от O на расстоянии, меньшем 1/2 м), и на отрезок A_1A_2 длиной 1/4 м уйдет опять более 1/2 с. Вы уже, конечно, догадались, как мы будет рассуждать дальше: точка A_3 — середина отрезка OA_2, на отрезок A_2A_3 длиной 1/8 м при скорости, меньшей 1/4 м/с, опять-таки уйдет более 1/2 с и т. д. Процесс деления можно продолжать неограниченно, и мы можем набрать любое число отрезков, на прохождение которых уходит больше 1/2 с, так и не добравшись до O. Значит, тело из O попасть в A вообще не может!

Мы предположили, что A находится на расстоянии 1 м от O. Но аналогично показывается, что вообще ни в какую точку тело из O попасть не может. Вот с какого замечательного рассуждения началась классическая механика!

Ну что же, у Галилея были все основания обидеться на коварство природы, которая не выбрала самого простого пути. Однако вера в разумность природы у Галилея не угасла. Он рассматривает не менее простое предположение, что нарастание скорости происходит пропорционально времени: $v = ct$. Такое движение он назвал естественно ускоренным, но прижился термин «равномерно ускоренное движение». Галилей рассматривает график скорости на отрезке времени от 0 до t (рис. 3) и замечает, что если взять моменты времени t_1, t_2, равноотстоящие от $t/2$, то насколько в t_1 скорость меньше $ct/2$, настолько в t_2 она больше. Отсюда он делает вывод, что в среднем скорость равна $ct/2$, а пройденный путь равен $ct/2 \cdot t = ct^2/2$ (не слишком строгое рассуждение!). Значит, если рассмотреть равноотстоящие отрезки времени $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$, то отрезки пути, пройденные от начала, будут относиться как квадраты натуральных чисел 1, 4, 9, 16,..., а отрезки, пройденные между соседними моментами отсчета,— как нечетные числа 1, 3, 5, 7,...

Именно этот вывод Галилей считает основным и его он хочет проверить. Но как это сделать? Нельзя же продолжать кидать камни с Пизанской башни (хотя, может быть, для наблюдения и удобно, что она разделена на этажи), а в лаборатории падение происходит слишком быстро. Галилей и здесь находит выход. Он показывает, что если свободное падение равноускоренное, то равноускоренным будет и движение тел по наклонной плоскости. Он проводит серию очень остроумно подобранных экспериментов.

Движение по наклонной плоскости

Галилей поступает следующим образом. Он замечает, что из предположения о равноускоренности свободного падения следует равноускоренность движения тяжелой точки по наклонной плоскости. По существу — это привычное сегодня рассуждение с разложением сил, показывающее, что тяжелая точка скатывается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$, где α — угол наклона к горизонтали (g — ускорение свободного падения). Рассуждения Галилея более громоздки: он не вводит ускорения свободного падения, а манипулирует, как это было принято тогда, с большим числом пропорций. Он делает целый ряд следствий из равноускоренности движения точки по наклонной плоскости, которые уже удобны для лабораторной проверки (если угол наклона мал, то время скатывания велико). Центральное место занимает утверждение, что если наклонные плоскости имеют одинаковую высоту AB, то времена скатывания относятся как пройденные пути AB_j (рис. 4).

Движение по наклонной плоскости представляет для Галилея самостоятельный интерес. Он делает целый ряд наблюдений. Например, если точки двигаются по хордам окружности AE_i, BF_j (рис. 5), AB — вертикальный диаметр, то все времена скатывания равны времени свободного падения по AB (докажите!). Довольно сложное рассуждение приводит Галилей в доказательство того, что если A, B, C — последовательные точки на окружности (рис. 6), то точка по ломаной ABC скатывается быстрее, чем по хорде AC. С этим утверждением связана известная ошибка Галилея: он считал, что быстрее всего точка из A в B скатывается по четверти окружности, в то время как этим свойством обладает дуга циклоиды (см. «Квант», 1975, № 12, с. 29).

В экспериментах с наклонными плоскостями Галилей нуждался в средстве для сравнения времен. Для этого он пользовался медленно вытекающей струей воды, то есть некоторым вариантом водяных часов.

Движение брошенных тел

Такое движение Галилей называл принужденным (в отличие от свободного падения). Аристотель считал, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается вначале по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикальной прямой. Возможно Тарталья*) был первым, кто утверждал, что траектория брошенного тела «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Об этом говорится в его книге «Проблемы и различные изобретения», где читателю обещаются «...новые изобретения, не краденные ни у Платона, ни у Плотина, ни у какого иного грека и латинянина, а полученные лишь искусством, измерением и разумом». Задачей о движении брошенного тела Тарталья заинтересовался под влиянием вопросов инженеров из знаменитого венецианского арсенала. Тарталью спрашивали, в частности, под каким углом надо наклонить ствол орудия, чтобы обеспечить наибольшую дальность полета ядра. Ответу — 45° — не поверили, но «несколько частных опытов» доказали правоту Тартальи. Тарталья упоминает о каких-то «математических доводах», но, несомненно, сколько-нибудь полной теорией движения брошенного тела он не обладал.

Такую теорию построил Галилей сразу же за теорией свободного падения. Путь, по которому он двигался, был прежним: теория (модель явления) предшествовала экспериментам. Догадка Галилея была гениально простой: движение тела,

*) Никколо Тарталья (1500—1557). Подробнее о нем можно прочитать, например, в статье С. Гиндикина «Великое искусство» («Квант», 1976, № 9).

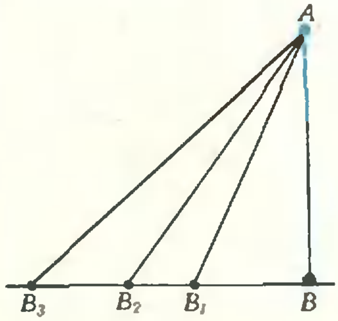


Рис. 4.

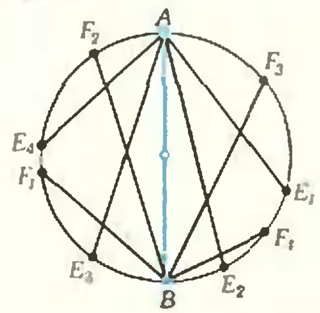


Рис. 5.

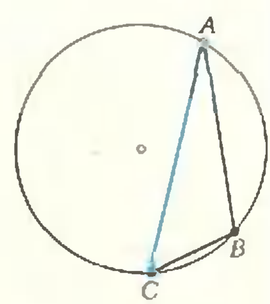


Рис. 6.

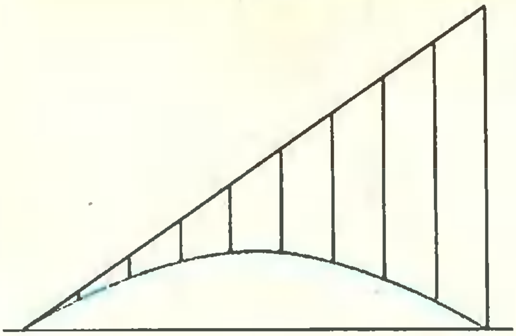


Рис. 7.

брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного прямолинейного движения, которое имело бы место не будь силы тяжести, и свободного падения. В результате тело двигается по параболе (рис. 7). Отметим, что в этом рассуждении существенно используется закон инерции — закон Галилея.

Открытие Галилея поразило современников. Конические сечения (эллипсы, параболы, гиперболы) — вершина греческой геометрии — казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к реальной действительности. И вот Кеплер обнаружил, что по эллипсам двигаются планеты, а Галилей показал, что параболы возникают уж совсем в «земной» ситуации. (Еще в XIX веке Лаплас приводил применение конических сечений как самое неожиданное из применений чистой математики.) Пользуясь свойствами параболы, Галилей составил целый ряд таблиц, которые, в частности, допускают экспериментальную проверку. Он доказал утверждение Тартальи о том, что угол в 45° отвечает наибольшей дальности полета, и показал, что для углов, дающих в сумме 90°, дальности полета одинаковы (при фиксированной величине скорости).

Работы Галилея по механике были закончены в Падуе, но опубликованы лишь в конце жизни Галилея в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Она вышла в 1638 году, а была написана после отречения Галилея, когда он был тяжело болен и почти слеп. «Я хотя и молчу, но провожу жизнь не совсем праздно» — писал он. Книга написана в форме диалогов, которые ведут в течение шести дней Сальвиати (проводящий точку зрения автора), Сагредо и Симпличио (сторонник Аристотеля, его имя переводится как «простак»). В третий и четвертый дни они читают трактат академика (Галилея) «О местном движении» и подробно обсуждают его. Эта дискуссия позволяет многое узнать про то, как Галилей шел к своим открытиям.

Эпилог

У рассказанной истории есть и другая сторона: это — история не только о совершившемся открытии, но и об открытии... упущенном. После того как Галилей понял, что по закону $v(t)=cs(t)$ движение происходить не может, он потерял интерес к этому закону. Его интересуют только естественные движения, происходящие в природе, а не те умозрительные движения, «которые в действительности в природе не встречаются, но могут соответствовать предполагаемым условиям». Вскоре шотландский лорд Непер заинтересовался движением, происходящим по аналогичному закону.

Непер рассмотрел прямолинейное движение, происходящее по закону $v(t)=l(t)$, где $v(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t, а $l(t)$ — расстояние движущейся точки в момент t от фиксированной точки 0 на прямой. Случай, рассмотренный Галилеем, отвечает ситуации, когда движущаяся точка находится в начальный момент $t=0$ в точке 0, то есть $l(0)=0$, $l(t)=s(t)$. У Непера $l(0)>0$, $l(t)=l(0)+s(t)$.

Оказывается, что движение с такими свойствами в принципе происходить может и обладает замечательными математическими свойствами (хотя «в природе и не происходит»!). Прежде всего, если начальное расстояние $l(0)$ умножить на c, то на c умножатся расстояния $l(t)$ и скорости $v(t)$ во все моменты


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Титульный лист «Бесед».

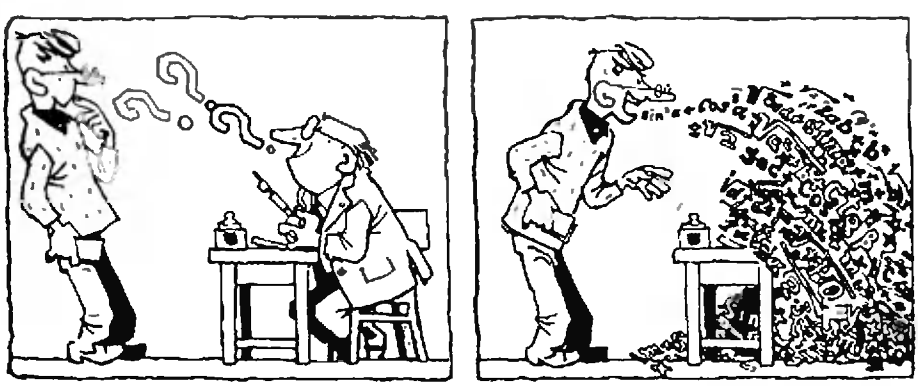
времени. Далее, Непер ограничивается случаем $l(0)=1$. Тогда $l(t_1+t_2)=l(t_1)l(t_2)$. Наметим доказательство этого соотношения. Удобно объявить момент t_1 новым началом отсчета времени. Тогда в силу сказанного выше в новый момент t_2 (старый t_1+t_2) расстояние до 0 должно быть в $l(t_1)$ раз больше, чем в старый момент t_2. Это и означает что $l(t_1+t_2)=l(t_1)l(t_2)$. Так впервые появилась в науке показательная функция.

Имеем $l(x)=e^x$, где $e=l(1)$, то есть это расстояние от 0 в момент $t=1$. Пользуясь тем, что e — расстояние от 0 в момент времени $t=1$, и тем, что $v=l$, нетрудно показать, что $e>2$ (докажите!). На самом деле $e=2{,}71828...$; e стали называть числом Непера. Рассматривая движения, происходящие по закону $v(t)=ks(t)$, можно получить показательные функции с другими основаниями.

Для всякого положительного a время t, для которого $s(t)=a$, Непер назвал логарифмом (натуральным) a (обозначается $\ln a$). В силу сказанного выше $\ln ab=\ln a+\ln b$. Двадцать лет составлял Непер таблицы логарифмов, и в 1614 году вышло «Описание удивительной таблицы логарифмов», предуведомление к которой содержало извинения за неминуемые ошибки и кончалось словами: «Ничто сначала не бывает совершенным».

Открытие Непера замечательно не только тем, что он создал таблицы логарифмов, но и тем, что он показал, что новые функции могут появляться при изучении движений. Начиная с этих работ Галилея и Непера, механика стала для математики постоянным источником новых функций и кривых.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



Происшествие на экзамене

«Альфа» 73 — № 1

В. Майер

Автоколебания в потоке воздуха

Существует несколько способов возбуждения незатухающих колебаний упругих тел. Один из них — с помощью постоянного потока воздуха. Предлагаем вам провести несложный эксперимент, позволяющий воочию убедиться в этом.

Вырежьте из плотной бумаги полоску шириной 2 — 3 см и длиной 50 — 80 см. Концы полоски несколько раз оберните вокруг двух карандашей и возьмитесь за них руками. Свободно расположите полоску на расстоянии 20—50 см перед включенным вентилятором так, чтобы плоскость полоски была горизонтальной. Вы увидите, что под действием потока воздуха полоска начнет колебаться, причем колебания ее будут нерегулярными и непериодическими.

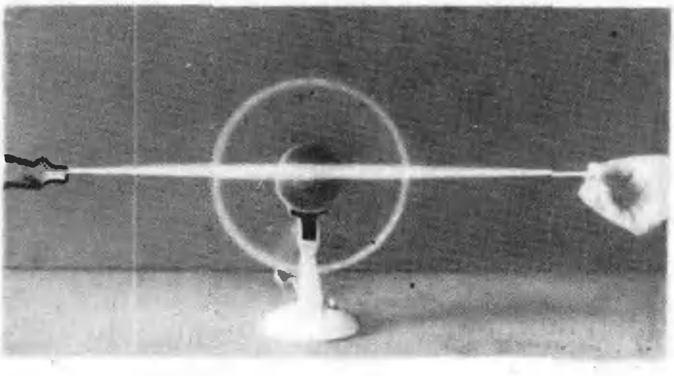
Теперь постепенно натягивайте полоску (прикладывать слишком большие усилия не нужно). При некотором натяжении возникнут довольно сильные периодические колебания и на полоске установится стоячая волна (см. рисунок). Появившиеся колебания будут продолжаться в течение всего времени, пока вы сможете условия опыта поддерживать неизменными. Очевидно, это — *автоколебательный процесс*.

Попробуем разобраться в причине образования автоколебаний. Поток воздуха, обтекающий полоску, вызывает появление воздушных вихрей, которые периодически срываются с полоски. В моменты отрыва вихрей изменяется сопротивление полоски воздушному потоку. Поскольку вихри отрываются через равные промежутки времени, можно сказать, что со стороны воздушного потока на бумажную полоску периодически действует сила. В результате полоска совершает автоколебания.

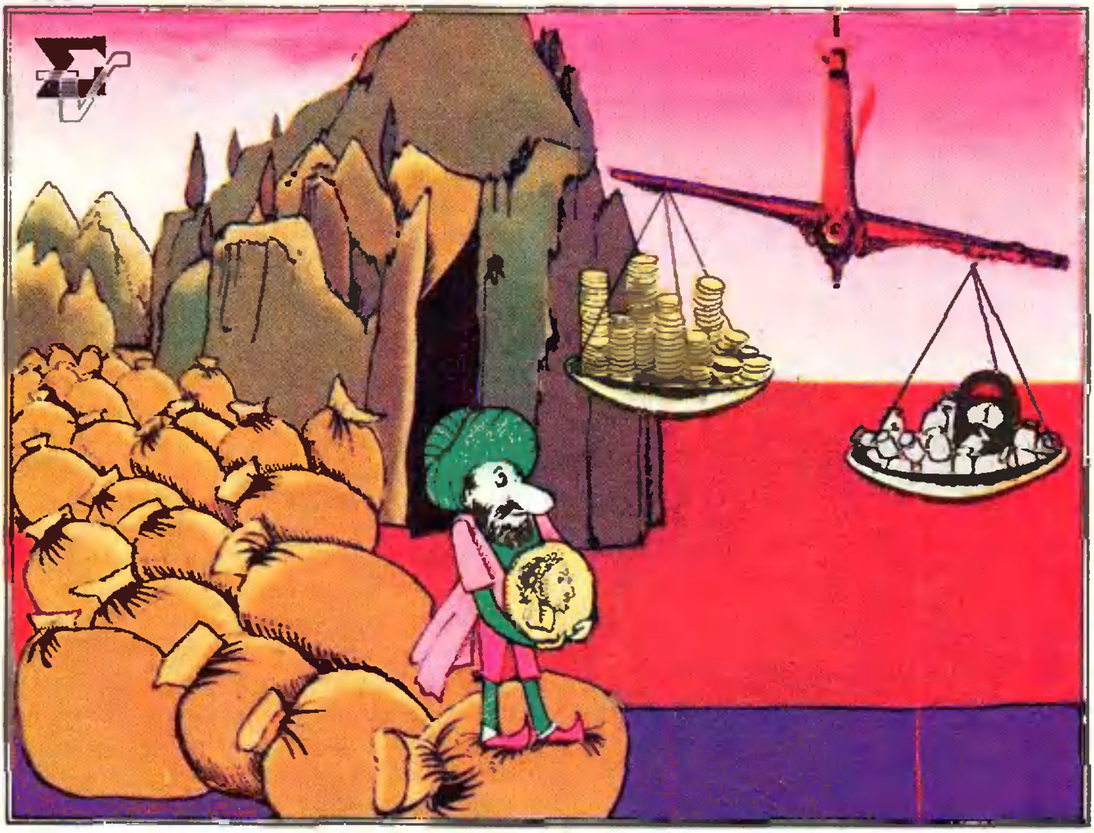
Почему же колебания стали заметными лишь при определенном натяжении бумажной полоски? Дело в том, что полоска представляет собой упругое тело, способное совершать *собственные* колебания. Изменяя натяжение полоски, мы тем самым меняли частоту ее собственных колебаний. Когда частота собственных колебаний совпала с частотой автоколебаний, наступил своеобразный резонанс и амплитуда автоколебаний резко возросла.

Таким образом, в этом эксперименте тесно переплетаются автоколебательные и резонансные явления.

О том, к каким нежелательным эффектам могут привести эти явления, рассказывалось в третьем номере журнала за 1972 год в статье Л. Асламазова «Почему гудят провода».



Так выглядит натянутая бумажная полоска, в которой под действием потока воздуха от вентилятора установилась стоячая волна.



М. Мамикон

Обобщенная задача о фальшивых монетах

Многим читателям хорошо известна следующая классическая задача о фальшивых монетах, поражающая тем, что она разрешима:

Задача о мешке с фальшивыми монетами

Имеются N мешков и в каждом из них достаточное количество монет. Все мешки, кроме одного, содержат одинаковые «нормальные» монеты, в одном же мешке все монеты фальшивые. Известен вес нормальной монеты и известно, что фальшивая монета на 1 грамм легче нормальной. Требуется при помощи о д н о г о *в з в е ш и в а н и я на весах с разновесками обнаружить мешок с фальшивыми монетами.*

Вот как решается эта задача. Мешки последовательно нумеруются и из каждого мешка берется количество монет, равное номеру этого мешка. Суммарный вес всех взятых таким образом монет будет «не дотягивать» до веса такого же количества нормальных монет (который нам известен) на количество граммов, равное номеру именно того мешка, который содержит фальшивые монеты*).

Раздумывая над этой задачей, я пришел к более удивительному выводу о том, что одним взвешиванием может быть решена и более сложная задача:

*) Эта задача решается — правда, хитрее — и в том случае, когда вес нормальной монеты неизвестен и разновесков нет. Подумайте, как.

Задача о нескольких мешках с фальшивыми монетами

Пусть в условиях предыдущей задачи имеется не один, а несколько мешков с фальшивыми монетами, причем их количество неизвестно. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками обнаружить все эти мешки.

Решив и эту задачу, я осмелился на дальнейшие усложнения. Задача оказалась разрешимой при еще более удивительных условиях:

Задача о мешках с тяжелыми и легкими монетами

Среди N мешков имеются некоторое (неизвестное) количество мешков с тяжелыми и некоторое (тоже неизвестное) количество мешков с легкими монетами. Легкая монета на 1 г легче нормальной, а тяжелая, наоборот, на 1 г тяжелее нормальной. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками узнать, какие мешки содержат нормальные монеты, какие — тяжелые, а какие — легкие. (Напомним, что внутри данного мешка все монеты одинакового веса и что вес нормальной монеты известен.)

Разрешимость и этой задачи вдохновила меня на дальнейшее обобщение, которое уже напрашивалось само собой. До сих пор мы фактически рассматривали задачи о двух или трех сортах (типах) монет, поэтому естественна следующая

Задача о мешках с разносортными монетами

Пусть имеются N мешков и в каждом достаточное количество монет. Имеются монеты разных сортов, но в каждом мешке содержатся монеты только одного сорта. Количество мешков с монетами данного сорта произвольное, и нам оно неизвестно. Монеты разных сортов отличаются друг от друга по весу, причем на целое число граммов. Вес монеты каждого сорта нам известен. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками определить, к какому сорту принадлежат монеты в каждом мешке.

Мы предлагаем читателю попробовать самостоятельно решить предыдущие задачи, прежде чем перейти к излагаемому ниже решению обобщенной задачи о фальшивых монетах.

Решение задачи о мешках с разносортными монетами

Перенумеруем последовательно мешки от 0 до $N-1$. Обозначим вес самой легкой монеты через m. Пусть мешок под номером j содержит монеты веса $m+\Delta_j$, то есть Δ_j определяет сорт монеты в j-м мешке. Пусть в зависимости от сорта монеты величины Δ могут принимать (целые) значения 0, 1, 2,..., меньшие k, то есть количество сортов монет равно k.

Теперь возьмем из мешка с номером j количество монет, равное k^j, то есть из первого мешка — одну монету, из второго — k,..., из последнего — k^{N-1} монет. Всего взятых монет будет

$$M=\sum_{j=0}^{N-1} k^j = 1+k+k^2+\ldots$$
$$\ldots+k^{N-1}=\frac{k^N-1}{k-1}.$$

Их суммарный вес S на весах будет равен

$$S=\sum_{j=0}^{N-1}(m+\Delta_j)\,k^j=m\sum_{j=0}^{N-1}k^j+$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j=m\cdot M+\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j.$$

Поскольку всегда $\Delta_j<k$, вторая сумма в правой части

$$\Delta=\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j=\Delta_0+\Delta_1 k+\Delta_2 k^2+\ldots$$
$$\ldots+\Delta_{N-1}k^{N-1}$$

представляет собой перевод числа Δ из десятичной системы счисления (в которой работают весы) в систему счисления с основанием, равным k. В этой системе Δ записывается в виде числа со следующей последовательностью цифр:

$$\Delta \rightarrow \overline{\Delta_{N-1}\Delta_{N-2}\ldots\Delta_2\Delta_1\Delta_0}. \qquad (*)$$

Мы видим, что каждая цифра этой записи показывает сорт монеты в последовательности мешков, взятой в обратном порядке. В этом состоит суть нашего решения.

Итак, из суммарного веса S всех выбранных M монет вычитаем величину Mm — вес того же количества монет наилегчайшего сорта и оставшееся число $\Delta = S - Mm$ переводим в систему счисления с основанием k (разлагаем по степеням k, начиная со старшей). Тогда мы получим число вида (*). Его j-я цифра с конца (счет ведется от нуля) показывает сорт монеты Δ_j в мешке под номером j.

Пример

В приводимой ниже таблице указаны веса монет, содержащихся в пяти мешках. Сверху дана нумерация мешков справа налево (это и есть обратный порядок), а под мешками указаны сорта монет. Они являются искомыми.

4	3	2	1	0	номер мешка j
11 г	12 г	10 г	12 г	10 г	содержимое мешка $m+\Delta_j$
1	2	0	2	0	сорт монеты Δ_j
81	27	9	3	1	количество взятых монет k_j

В этом случае $k=3$ и количество взятых монет соответствует степеням тройки, как показано в последней строчке таблицы. Всего мы взяли $M=121$ монету. Их общий вес на весах будет равен $S=1351$ г. Вычитая величину $M \cdot m = 121 \cdot 10$, получим $\Delta = 141$ г. Переводя Δ в троичную систему

$\Delta = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + {}$
$+ 0 \cdot 3^2$,

получим число $\overline{12020}$, последовательность цифр которого совпадает с исходной последовательностью сортов, приведенной в таблице.

Если $k=10$, то надобность перевода Δ из одной системы счисления в другую отпадает. Для случая $k=3$ существует несколько отличная от нашей интерпретация решения задачи. Найти ее мы предоставляем читателю.

Немного истории

Классическую задачу об одном мешке с фальшивыми монетами можно найти во многих популярных книжках по математике. Говорят, что во время второй мировой войны англичане «сбросили» эту задачу над немецкими солдатами с целью их дезорганизации и что те потеряли над ее решением более 40 000 человеко-часов.

В книге Д. Бизама и Я. Герцега «Многоцветная логика» (М., «Мир», 1978 г.) рассматривается также случай двух мешков с фальшивыми монетами и приводится решение этой задачи при помощи двух взвешиваний.

Классическая задача о фальшивых монетах в последнее время нашла применение в теории кодирования и информации — для обнаружения ошибки в коде.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА

Кто из студентов здоровался со мной за руку

«Альфа» 77 — № 3

задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер уже 10 лет — с момента основания журнала. В нем публикуются задачи, решения которых мы ожидаем получить от читателей. Среди них — задачи, близкие к олимпиадным, требующие длительных размышлений. Наряду с относительно легкими задачами встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам. Самые трудные задачи помечаются звездочкой.

Если задача вас заинтересовала, но не получилась сразу — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней через день, через неделю. Не откладывайте ее даже после того, как она сделана — подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как обобщить задачу, уточнить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решить.

Во второй части раздела мы помещаем решения задач (примерно через 8—10 месяцев после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. Каждое решение — это, по существу, небольшая отдельная статья. Мы советуем разобраться в них и тем, кто не выписывал в прошлом году «Квант» или не решал задач.

Мы регулярно публикуем фамилии читателей, приславших нам решения. Школьники, присылающие интересные и полные решения, получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной олимпиады (итоги, на основании которых победители конкурса Задачника «Кванта» получают приглашения на олимпиаду, подводятся в декабре).

Для учеников Всесоюзной заочной математической школы правильное решение задач из Задачника считается выполнением факультативных заданий.

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие» — пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с кратким решением. Наиболее интересные задачи мы публикуем в Задачнике или других разделах журнала. Новые задачи, а также решения и комментарии к задачам из Задачника мы будем рады получать не только от школьников, но и от взрослых читателей журнала.

Наш адрес: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» — и укажите решения каких задач вы посылаете (например: «№ 1 (1980), М602, М605, а, б»), либо пометьте «Новая задача по математике (физике)». Решения задач по разным предметам или из разных номеров журнала просьба присылать в разных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые материалы, предназначенные публикации) нужно присылать в двух экземплярах. Мы стараемся отвечать всем нашим корреспондентам. Просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела Задачник «Кванта». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес; школьников просим также указывать класс и школу (и «номер» или адрес филиала, если вы учитесь в ВЗМШ).

Крайний срок посылки ответов на задачи этого номера — 15 марта 1980 года.

Задачи

М601—М605; Ф613—Ф617

М601. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника ABC с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

Г. Грошев,
ученик 10 класса

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	8 28 56 70 56 28 8 1

Рис. 1. В n-й строке k-е по порядку число равно $C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$.

М602. В треугольнике Паскаля, начало которого изображено на рисунке 1 (каждое «внутреннее» число равно сумме двух стоящих над ним), в седьмой строке встречаются подряд три числа, образующие арифметическую прогрессию.

а) В какой следующей строке случится такое же событие?

б) Докажите, что оно произойдет в бесконечном количестве строк, и постарайтесь указать все номера таких строк.

А. Аврамов

М603*. Решите систему уравнений

$$x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3,\quad y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0.$$

Л. Купцов

М604. а) Андрей, Виктор, Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках A_0, B_0, C_0 и тут же нырнули снова, причем Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор — треть пути до Сергея, Сергей — треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки A_1, B_1, C_1 — см. рис. 2) и решили повторить этот маневр — уже за полминуты; потом — за четверть минуты и т. д.

Где и когда они встретятся?

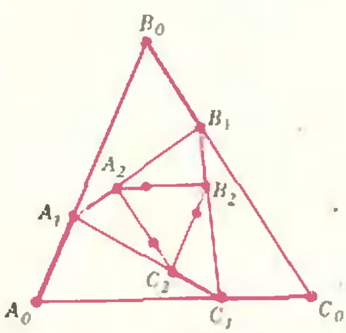


Рис. 2.

б)* Внутри сферы радиуса 1 км расположен миллион точек, занумерованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка двигается к следующей по номеру на $1/3$ расстояния до этой точки; последняя точка точно так же двигается к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри некоторой сферы радиуса 1 мм.

Ф. Шлейфер

М605. На плоскости отмечены $2n+1$ различных точек. Занумеруем их числами $1, 2, \ldots, 2n+1$ и рассмотрим следующее преобразование R плоскости: сначала делается симметрия относительно первой точки, затем — относительно второй и т. д. — до $(2n+1)$-й точки.

а) Докажите, что у этого преобразования R есть единственная «неподвижная точка» (точка, которая отображается в себя).

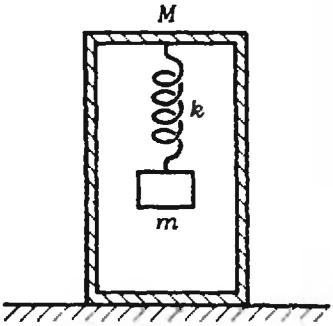


Рис. 3.

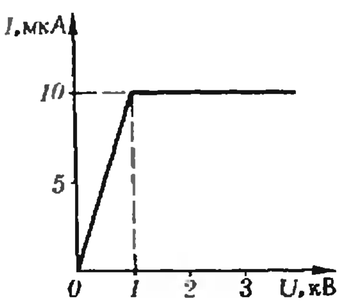


Рис. 4.

Рассмотрим всевозможные способы нумерации наших $2n+1$ точек (числами $1, 2, \ldots, 2n+1$). Каждой такой нумерации соответствуют свое преобразование плоскости R и своя неподвижная точка. Пусть F — множество неподвижных точек всех этих преобразований.

б) Укажите множество F для $n=1$.

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество F при каждом $n = 2, 3, \ldots$?

А. Талалай

Ф613. Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. В коробке на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m (рис. 1). При какой амплитуде колебаний груза коробка начнет подпрыгивать на столе?

Л. Баканина

Ф614. В замкнутом сосуде находился газообразный азот при комнатной температуре $t_0 = 20°C$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па. В сосуд впрыснули некоторое количество жидкого азота с температурой $t_1 = -196°C$ (температура кипения азота при нормальном атмосферном давлении). Жидкий азот быстро испарился, после чего температура в сосуде оказалась равной $t_2 = -140°C$. После того как сосуд прогрелся до комнатной температуры, в нем установилось давление $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль·К).

В. Белонучкин

Ф615. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U между электродами трубки имеет вид, показанный на рисунке 2. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^8$ Ом подключена к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 6$ кВ. Найдите, какой ток установится через трубку и чему будет равно при этом напряжение на трубке. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

В. Можаев

Ф616*. Длина нити накаливания электрической лампочки равна l, а диаметр — d. Каковы длина l_1 и диаметр d_1 другой лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети, но с вдвое бо́льшим световым потоком, если КПД обеих лампочек один и тот же?

Ф617. Газетный текст, фотографируется аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние 50 мм, дважды:

1) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния $a = 0{,}5$ м;

2) после присоединения объектива к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм (также с минимально возможного расстояния).

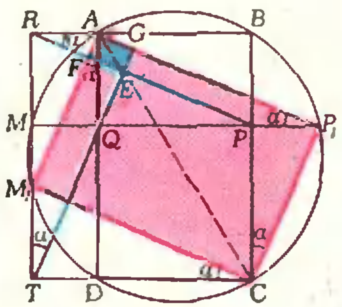
Найдите отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих двух случаях.

В. Дерябкин

Решения задач

М546—М550; Ф558—Ф562

М546. *Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагоналям прямоугольника.*



Обозначим через M_1 и P_1 точки пересечения отрезков MT и MP с данной окружностью (см. рис.). Поскольку углы MMP_1 и ADC прямые, углы M_1AP_1 и AM_1C также прямые и четырехугольник AP_1CM_1 — прямоугольник. С другой стороны, четырехугольники AM_1TQ и $ARPP_1$ — параллелограммы (пары отрезков M_1T, AQ и AR, PP_1 параллельны и равны по длине). Поэтому $(AM_1)\parallel(TE)$ и $(AP_1)\parallel(RP)$. Отсюда следует, что $(TE)\perp(RP)$.

Второе же утверждение задачи ($E\in(AC)$) эквивалентно подобию прямоугольников AP_1CM_1 и $AGEF$. Покажем, что они действительно подобны.

В самом деле, все отмеченные на рисунке углы конгруэнтны; пусть они равны по величине α. Тогда, если $|AM_1|=a$ и $|CM_1|=b$, то $|AF|=|AR|\sin\alpha=|PP_1|\sin\alpha=|CP_1|\sin^2\alpha=a\sin^2\alpha$ и аналогично $|AG|=b\sin^2\alpha$, то есть $\frac{|AM_1|}{|CM_1|}=\frac{|AF|}{|FE|}$.

Поэтому $E\in[AC]$.

И. Клумова

◆

М547. *Для того чтобы уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым. Докажите это.*

Из уравнения $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ следует, что $\frac{1}{x}>\frac{1}{n}$, то есть $x<n$. Поэтому, если $n=1$, то в натуральных числах решений нет. Пусть $n\neq 1$, тогда $x=n-i$, $0<i<n$, и $\frac{1}{n-i}-\frac{1}{n}=\frac{1}{y}$. Отсюда $y=\frac{n(n-i)}{i}$. Одно решение (в натуральных числах) всегда есть: оно получается при $i=1$: $x=n-1$, $y=n(n-1)$.

Пусть теперь n — простое и $i>1$. Тогда числа n и i взаимно просты и числа $n-i$ и i также взаимно просты, а следовательно, числа $n(n-i)$ и i также взаимно просты (убедитесь в этом, рассмотрев, например, сумму $n(n-i)+ni$). Поэтому, если n — простое, а $i>1$, получаем $y=\frac{n(n-i)}{i}\notin \mathbf{N}$. Значит, при простом n обязательно $i=1$, и у нашего уравнения решение единственно.

Если же n — составное: $n=n_1n_2$, то положив, например, $i=n_1$, получим, кроме решения $x=n-1$, $y=n(n-1)$, еще одно: $x=n-n_1$, $y=n_2(n-n_1)$. Это полностью доказывает утверждение задачи.

А. Даниелян

◆

М548. *а) На окружности расположено 4 точки. Через середину хорды, соединяющей две из них, проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки. (Такая прямая проводится для каждой пары точек.) Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.*

Решим сразу пункт в) задачи. Для этого прежде всего надо его сформулировать:

На окружности расположено n точек. Через центр тяжести n — 2 из них проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей оставшиеся две точки. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

Но что такое центр тяжести k точек? Дадим определение: *центром тяжести k точек A_1, A_2, ..., A_k* называется такая точка G, что

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}.$$

б) На окружности расположено 5 точек. Через центр тяжести трех из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай n точек.

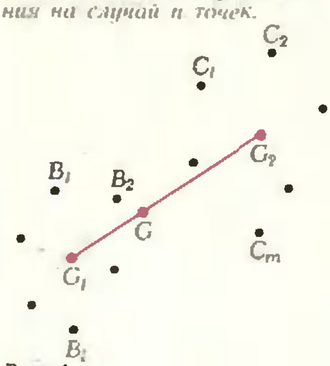


Рис. 1.

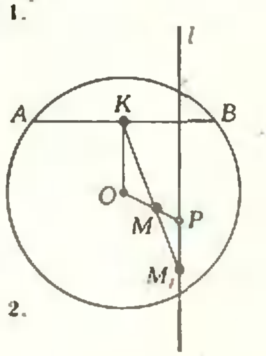


Рис. 2.

Легко убедиться, что если точка G существует, то она определяется однозначно. В самом деле, для любой точки M, отличной от точки G,

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_k}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1})+$$
$$+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2})+\ldots+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_k})=k\overrightarrow{MG}\neq 0.$$

Поэтому, если точка G существует, то она единственная. С другой стороны, ясно, что найти ее можно следующим образом: взять произвольную точку M и построить точку G так, чтобы

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_k})$$

— центр тяжести является, так сказать, «средним арифметическим», но не чисел, а т о ч е к.

Формулировка задачи полностью прояснена, остается ее решить.

Для этого нам понадобится такое свойство центра тяжести:

Центр тяжести G системы из $l+m$ точек $B_1, \ldots, B_l, C_1, \ldots, C_m$ делит отрезок G_1G_2, где G_1 — центр тяжести точек $B_1, \ldots, B_l$, а G_2 — центр тяжести точек $C_1, \ldots, C_m$ в отношении $m:l$ (рис. 1). Докажите это свойство самостоятельно.

Теперь уже очень легко решить задачу.

Пусть M — центр тяжести наших n точек, O — центр окружности, M_1 — центр тяжести некоторых $n-2$ точек, K — середина «оставшейся» хорды, а l — соответствующая перпендикулярная ей прямая (рис. 2). Точки K, M и M_1 лежат на одной прямой, причем $\frac{|KM|}{|MM_1|}=\frac{n-2}{2}$ (K — центр тяжести точек A и B). Пусть P — точка пересечения прямых OM и l. Треугольники KOM и M_1PM подобны, поскольку $(KO)\parallel l$. Поэтому $\frac{|MP|}{|OM|}=\frac{2}{n-2}$ и точка P однозначно определяется по точкам O и M. Следовательно, эта точка является общей для всех прямых.

Л. Лиманов

◆

М349. *Дано натуральное число N. Выпишем все его делители $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ выполняется равенство*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=$$
$$=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3.$$

Например, число $N=6$ имеет четыре делителя: 1, 2, 3, 6; здесь $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=4$ и
$$(1+2+2+4)^2=$$
$$=1^3+2^3+2^3+4^3.$$

Справедливость равенства

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3 \qquad \text{(A)}$$

для любого $N \geq 1$ следует из двух утверждений:

1° (A) верно для $N=p^m$, где p — простое число.

2°. Если (A) верно для некоторого N, то (A) верно и для $M=N\cdot p^k$, где p — простое число, не являющееся делителем числа N.

Рассмотрим 1°. Очевидно, все делители числа $N=p^k$ — это $1, p, \ldots, p^k$, имеющие соответственно $1, 2, \ldots, k+1$ делителей. В данном случае (A) превращается в известное соотношение

$$(1+2+\ldots+(k+1))^2=1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3, \qquad \text{(B)}$$

которое можно доказать по индукции.

Докажем 2°. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — делители числа N, имеющие соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делителей, и пусть p не является делителем числа N. Тогда делители числа $N\cdot p^k$ и числа делителей каждого из этих делителей естественно расположить в виде двух таблиц:

$$\begin{array}{l}
d_1, \ldots, d_n \\
pd_1, \ldots, pd_n \\
p^2d_1, \ldots, p^2d_n \\
\ldots\ldots\ldots \\
p^kd_1, \ldots, p^kd_n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
a_1, \ldots, a_n \\
2a_1, \ldots, 2a_n \\
3a_1, \ldots, 3a_n \\
\ldots\ldots\ldots \\
(k+1)a_1, \ldots, (k+1)a_n.
\end{array}$$

Вычислим сумму кубов чисел второй таблицы:

$$\left(a_1^3+\dots+a_n^3\right)+\left((2a_1)^3+\dots\right.$$
$$\left.\dots+(2a_n)^3\right)+\dots+\left(((k+1)a_1)^3+\dots\right.$$
$$\left.\dots+((k+1)a_n)^3\right)=\left(a_1^3+\dots+a_n^3\right)\left(1^3+\dots+(k+1)^3\right).$$

Вычислим квадрат суммы этих чисел:

$$((a_1+\dots+a_n)+(2a_1+\dots+2a_n)+\dots$$
$$\dots+((k+1)a_1+\dots+(k+1)a_n))^2=$$
$$=(a_1+\dots+a_n)^2(1+2+\dots+(k+1))^2.$$

По предположению $\left(a_1+\dots+a_n\right)^2=a_1^3+\dots+a_n^3$. Из (В) получаем нужное равенство.

Утверждение задачи М549, по-видимому, впервые доказал известный французский математик *Ж. Лиувилль*. Наш читатель *В. Абрамович* из Ростова-на-Дону предлагает еще одну задачу про числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Попробуйте ее решить.

Докажите, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ можно так перенумеровать, чтобы выполнялось тождество

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\dots+(-1)^{n+1}a_n^2=$$
$$=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

(здесь мы считаем, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ уже имеют нужную нумерацию).

Например, для $N=12$ имеем числа 1, 2, 2, 3, 4, 6. Если

$$a_1=6,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=2,\ a_6=1,$$

то

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2=$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6.$$

В. Матизен

◆

М550. *Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно d км, должны добраться n велосипедистов, у которых имеется m велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью u км/ч или ехать на велосипеде со скоростью v км/ч. За какое наименьшее время все n велосипедистов смогут попасть из A в B? (Время считается по последнему прибывшему. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай: $m=2$, $n=3$.*

Разобьем решение задачи М550 на две части. Вначале, исходя из возможностей движения каждой из «точек системы» (каждого велосипедиста) в отдельности, найдем наименьшее время передвижения всей «системы точек». А затем опишем один из возможных способов движения, реализующих это наименьшее время.

Покажем, что в нашей задаче наименьшее время передвижения

$$t_{\min}=\frac{d}{v}\,\frac{m}{n}+\frac{d}{u}\,\frac{n-m}{n},$$

причем каждый из велосипедистов при таком движении проходит расстояние $d\frac{n-m}{n}$ пешком (со скоростью u), а оставшееся расстояние $d\frac{m}{n}$ проезжает на велосипеде (со скоростью v), и все велосипедисты добираются из A в B одновременно. Действительно, так как каждый из велосипедистов в общей сложности перемещается на расстояние d (из A в B), в итоге все m велосипедов проедут путь $m\cdot d$. Если какой-нибудь из велосипедистов проедет на велосипеде путь, больший $d\frac{m}{n}$, то найдется велосипедист, который проедет на велосипеде путь $d_1<d\frac{m}{n}$. Пешком этот велосипедист пройдет путь $d-d_1$. Полное время движения этого велосипедиста

$$t_1=\frac{d_1}{v}+\frac{d-d_1}{u}=\frac{d}{u}+d_1\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)$$

Так как по условию задачи $u<v$, а по предположению $d_1<d\frac{m}{n}$, для времени t_1 получим

$$t_1>\frac{d}{u}+d\frac{m}{n}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)=t_{\min}.$$

Очевидно, общее время движения группы T (которое засчитывается по последнему прибывшему) будет удовлетворять условию $T\geqslant t_1>t_{\min}$. Поэтому движение, при котором какой-нибудь велосипедист проезжает на велосипеде не $d\frac{m}{n}$, не будет «оптимальным».

Укажем теперь, как должны вести себя велосипедисты, чтобы общее время передвижения было равно $t_{\min}$. Это удобно сделать с помощью «столбов».

Будем считать, что по дороге на одинаковых расстояниях друг от друга расставлены n столбов: $K_1, K_2, \ldots, K_n$, причем последний столб — в пункте B. Способ передвижения состоит в следующем. m велосипедистов садятся на m велосипедов и проезжают вдоль дороги: первый — до

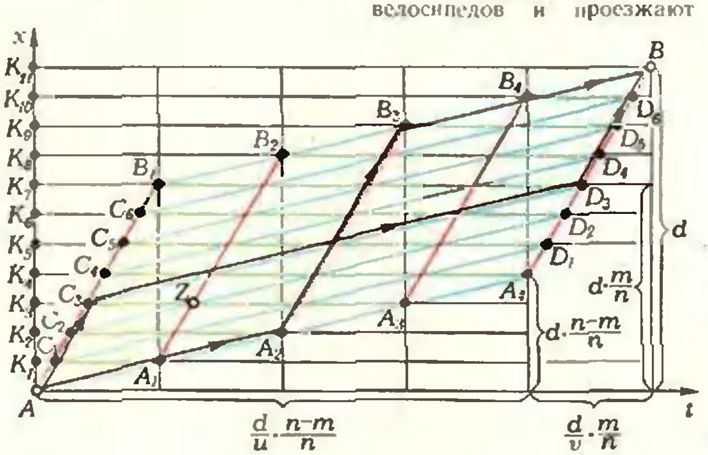


Рис. 1.

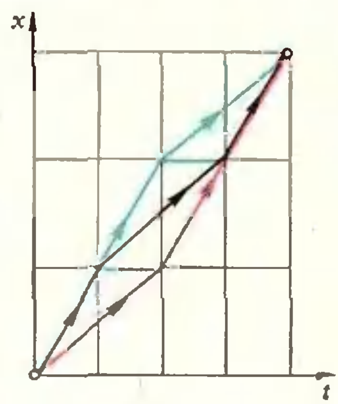


Рис. 2.

столба K_1, второй — до столба $K_2, \ldots, m$-й — до столба K_m. После этого они оставляют велосипеды на дороге (у столбов $K_1, \ldots, K_m$ соответственно) и дальше идут пешком. При этом первый велосипедист доходит до столба K_{n-m+1}, второй — до столба $K_{n-m+2}, \ldots$, а m-й велосипедист доходит до пункта B. $n-m$ велосипедистов, которым не достались велосипеды, идут из пункта A пешком. Они последовательно доходят до столбов $K_1, \ldots, K_{n-m}$, садятся на оставленные там велосипеды и дальше уже едут — до столбов $K_{m+1}, K_{m+2}, \ldots, K_n$ (то есть «последний» из этих велосипедистов приезжает в пункт B). Велосипедист, вначале доехавший до столба K_1, а затем дошедший до столба K_{n-m+1}, садится на стоящий там велосипед (оставленный велосипедистом из первой или из второй группы) и заканчивает свое движение на велосипеде. Велосипедист, вначале доехавший до столба K_2, а затем дошедший до столба K_{n-m+2}, садится на велосипед, оставленный велосипедистом, доехавшим до этого столба, и также заканчивает свое путешествие на велосипеде. И так далее.

Велосипедисты, которые вначале шли пешком, а потом ехали на велосипедах, оставляют (кроме последнего из них) свои велосипеды у столбов $K_{m+1}, \ldots, K_{n-1}$ соответственно и доканчивают свое движение пешком. Идущие пешком велосипедисты, начавшие свое движение на велосипедах, «подбирают» оставленные у соответствующих столбов велосипеды, садятся на них и таким образом заканчивают свое движение.

На рисунке 1 изображены графики перемещения велосипедистов из A в B для случая $m=7$, $n=11$ (по оси абсцисс отмечается время движения, по оси ординат — координата места нахождения). Красные отрезки отвечают перемещениям на велосипедах, синие — перемещениям пешком. На этом рисунке выделены графики перемещения одного из в ы е х а в ш и х из A и одного из в ы ш е д ш и х из A велосипедистов (ломаные AC_3D_3B и AA_2B_3B). Из графика видно, что время перемещения каждого велосипедиста равно t_{min}.

Случай $m=2$, $n=3$ проиллюстрирован на рисунке 2: синим цветом изображен график перемещения первого велосипедиста; красным — второго и черным — третьего.

С. Кротов

◆

Ф558. *Маленький тяжелый шарик влетает через отверстие внутри гладкой сферы той же массы, проходя на расстоянии $R/2$ от центра сферы (R — радиус сферы). После влета шарика отверстие автоматически закрывается. Считая соударения между шариком и сферой абсолютно упругими, найти траектории шарика и центра сферы в той системе отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Определить параметры этих траекторий и отметить на них точки, в которых происходят соударения.*

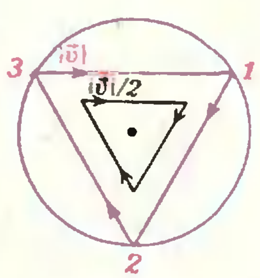


Рис. 1.

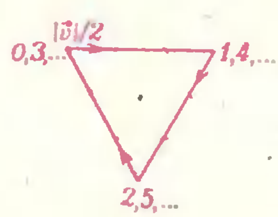


Рис. 2.

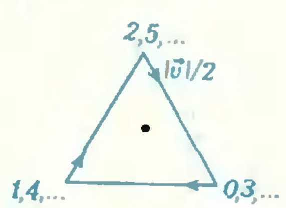


Рис. 3.

Пусть шарик влетает в отверстие со скоростью $\vec{v}$ относительно той системы отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Очевидно, что все движения будут происходить в плоскости, где лежат вектор $\vec{v}$ и центр сферы.

Массы шарика и сферы равны, поэтому центр масс системы будет двигаться со скоростью $\vec{v}/2$ по прямой, лежащей в той же плоскости на расстоянии $R/4$ от центра сферы. Так как внешние силы на систему не действуют, движение центра масс не изменится даже при наличии каких-либо соударений внутри системы.

По условию задачи соударения абсолютно упругие, а поверхности гладкие. Это означает, что касательная проекция скорости шарика относительно сферы остается неизменной, а нормальная меняет знак на противоположный. Следовательно, при каждом соударении модуль вектора скорости шарика относительно сферы не меняется и остается равным $|\vec{v}|$, а углы падения и отражения конгруэнтны. Траектория шарика относительно сферы имеет вид вписанного равностороннего треугольника со стороной $R\sqrt{3}$ (показан красным на рисунке 1), а промежутки времени между последовательными соударениями равны $R\sqrt{3}/|\vec{v}|$.

Центр масс системы относительно сферы движется со скоростью вдвое меньшей, и его траектория — тоже равносторонний треугольник, но со стороной $R\sqrt{3}/2$ (показан черным на рисунке 1).

Теперь рассмотрим поступательно движущуюся систему отсчета, где неподвижна не сфера, а центр масс системы. Скорости шарика и центра сферы в этой системе одинаковы по модулю, который равен $|\vec{v}|/2$, а движение происходит по траекториям, изображенным соответствующими цветами на рисунках 2 и 3.

В заключение остается перейти в исходную систему отсчета, где сфера первоначально покоилась, шарик двигался со скоростью $\vec{v}$, а центр масс все время движется со скоростью $\vec{v}/2$ (рис. 4). Для такого перехода необходимо прибавить вектор $\vec{v}/2$ ко всем векторам скоростей, изображенным на рисунках 2 и 3. Получится, что до первого соударения (после «нулевого», третьего, шестого,..., $3n$-го) шарик движется со скоростью, равной по модулю $|\vec{v}|$ и направленной параллельно скорости (и траектории) центра масс, и проходит расстояние $R\sqrt{3}$. Сфера в этот промежуток времени покоится.

После первого (четвертого, седьмого,..., $(3n+1)$-го) соударения вектор скорости шарика направлен под углом $-\pi/3$ к вектору скорости центра масс и по модулю равен

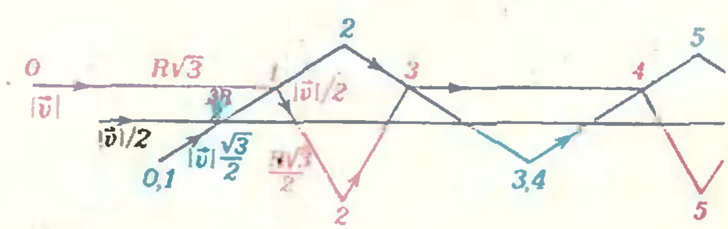


Рис. 4.

$|\vec{v}|/2$. До второго соударения шарик проходит путь $R\sqrt{3}/2$. Соответственно скорость сферы направлена под углом $\pi/6$ к тому же вектору, а ее модуль равен $|\vec{v}|\sqrt{3}/2$. Сфера проходит путь $3R/2$.

После второго (пятого, восьмого,..., $(3n+2)$-го) соударения векторы скоростей шарика и центра масс составляют угол $\pi/3$ и равны по модулю $|\vec{v}|/2$. Путь шарика прежний, то есть $R\sqrt{3}/2$. Наклон вектора скорости сферы в это время $-\pi/6$, модуль скорости $|\vec{v}|\sqrt{3}/2$, путь $3R/2$.

Далее картина повторяется, то есть между третьим и четвертым соударениями сфера снова покоится, а шарик движется со скоростью $\vec{v}$ и т. д.

Б. Буховцев

Ф559. *Согласно теории Бете углеродный цикл звездных термоядерных реакций состоит из следующих реакций:*

$$p+{}^{12}C\rightarrow{}^{13}N+\gamma,$$
$${}^{13}N\rightarrow{}^{13}C+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{13}C\rightarrow{}^{14}N+\gamma,$$
$$p+{}^{14}N\rightarrow{}^{15}O+\gamma,$$
$${}^{15}O\rightarrow{}^{15}N+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{15}N\rightarrow{}^{12}C+{}^{4}He.$$

Найти энергию, выделяющуюся при образовании моля гелия.

◆

Цикл Бете приводит к образованию из четырех протонов одного ядра гелия:

$$4p\rightarrow{}^{4}He+2e^{+}+3\gamma+2\nu.$$

Подсчитав по формуле $E=mc^2$ энергии частиц слева и справа, найдем энергию, выделившуюся при синтезе одного ядра атома гелия ($m_p=1{,}6724\cdot10^{-27}$ кг, $m_{He}=6{,}6439\cdot10^{-27}$ кг, $m_{e^+}=0{,}9108\cdot10^{-30}$ кг, $c=3\cdot10^{8}$ м/с):

$$E_{\text{выд}}=(4m_p-m_{^4He}-2m_{e^+})\,c^2=0{,}3951\cdot10^{-11}\text{ Дж}.$$

При образовании моля гелия выделяется энергия

$$W=E_{\text{выд}}N_A\approx2{,}4\cdot10^{9}\text{ кДж}$$

(здесь $N_A\approx6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

Ф560. *Плоская бесконечная струя толщины d_0 падает под углом α на плоскость (рис. 1). Скорость струи равна $\vec{v}$, ее плотность ρ. На какие струи распадается струя?*

◆

Обозначим через d_1 и d_2 толщины образовавшихся струй (рис. 2), а через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — их скорости. Так как через поперечное сечение первоначальной падающей струи за одну секунду проходит такая же масса жидкости, что и через поперечные сечения обеих образовавшихся струй, то

$$\rho d_0 v=\rho d_1 v_1+\rho d_2 v_2 \qquad (1)$$

(здесь v, v_1 и v_2 — модули соответствующих скоростей).

Выделим так называемую трубку тока жидкости (на рисунке 2 она показана цветом) и рассмотрим ее участок между сечениями *I* и *II*. За малое время Δt через сечение *I* площадью Δs втекает, а через сечение *II* площадью Δs_1 вытекает одна и та же масса жидкости.

$$\Delta m=\rho\Delta s v\Delta t=\rho\Delta s_1 v_1\Delta t.$$

Изменение кинетической энергии этой массы жидкости равно работе A сил давления $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$. Если при переходе через сечение *I* работа положительна, то при переходе через сечение *II* она отрицательна, поэтому

$$A=Fv\Delta t-F_1v_1\Delta t=p\Delta s v\Delta t-p_1\Delta s_1 v_1\Delta t,$$

где F и F_1 — модули сил давления, а p и p_1 — давления в сечениях *I* и *II* соответственно.

Но давление как в левой, так и в правой струях равно давлению в падающей струе (все струи имеют свободную плоскую поверхность и давление в них равно атмосферному), то есть $p=p_1$. Кроме того,

$$\Delta s v\Delta t=\Delta s_1 v_1\Delta t=\frac{\Delta m}{\rho}.$$

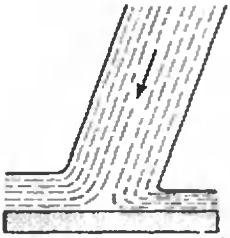


Рис. 1.

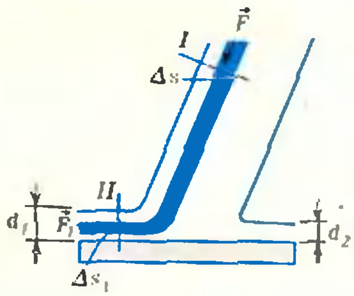


Рис. 2.

Таким образом,

$$A = p\frac{\Delta m}{\rho} - p\frac{\Delta m}{\rho} = 0,$$

и изменение кинетической энергии массы Δm жидкости равно нулю, то есть $v_1 = v$. Точно так же можно показать, что и $v_2 = v$. Поэтому из равенства (1) получаем

$$d_0 = d_1 + d_2. \qquad (2)$$

Так как на жидкость не действуют никакие внешние горизонтальные силы, горизонтальная проекция импульса текущей жидкости должна оставаться постоянной:

$$mv \cos\alpha = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

где $m \sim d_0$, $m_1 \sim d_1$, $m_2 \sim d_2$ и $v = v_1 = v_2$. Следовательно,

$$d_0 \cos\alpha = d_1 - d_2. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) получаем

$$d_1 = d_0 \cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad d_2 = d_0 \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

◆

Ф561. *Глубоководный батискаф сварен из двух полусфер радиуса $R = 2$ м. Батискаф должен погружаться на глубину $H = 10$ км. Какое напряжение (отношение модуля силы к длине экватора) должен выдерживать шов батискафа, если сварной экватор расположен: а) горизонтально? б) вертикально?*

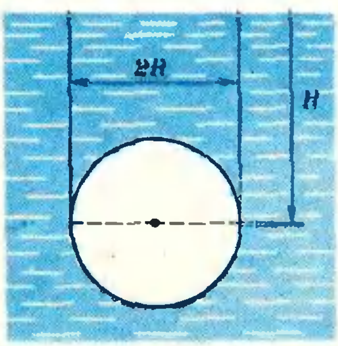


Рис. 1.

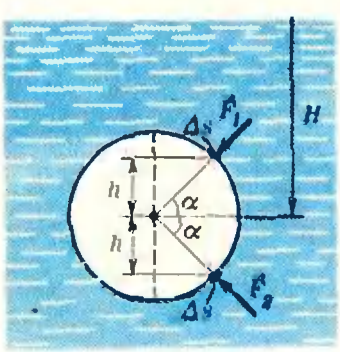


Рис. 2.

а) Сила, действующая по экватору на нижнюю часть батискафа, равна весу столба воды над верхней полусферой (рис. 1). Объем этого столба равен объему цилиндра радиусом R и высотой H без объема полусферы радиусом R, поэтому модуль веса воды равен

$$P = \rho g\left(H\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi R^3\right).$$

Напряжение, которое должен выдерживать шов батискафа, равно

$$\sigma_а = \frac{P}{2\pi R} = \frac{1}{2}\rho g\left(HR - \frac{2}{3}R^2\right).$$

б) Рассмотрим две маленькие площадки площадью Δs каждая, находящиеся на расстоянии h выше и ниже центра сферы (рис. 2). На верхнюю площадку действует сила $\vec{F}_1$, модуль которой $F_1 = \rho g(H - h)\Delta s$. Проекция этой силы на горизонтальную плоскость равна

$$F_1 \cos\alpha = \rho g(H - h)\Delta s \cos\alpha.$$

На нижнюю площадку действует сила $\vec{F}_2$, ее модуль $F_2 = \rho g(H + h)\Delta s$, а проекция на горизонтальную плоскость равна

$$F_2 \cos\alpha = \rho g(H + h)\Delta s \cos\alpha.$$

Сумма этих проекций не зависит от h и равна

$$2\rho g H \Delta s \cos\alpha.$$

Но $\Delta s \cos\alpha$ представляет собой проекцию площадки Δs на вертикальную плоскость. Отсюда следует, что сумма F горизонтальных проекций сил, действующих на всю правую полусферу, равна произведению величины $2\rho g H$ на половину площади сечения полусферы, проходящего через вертикальный диаметр:

$$F = 2\rho g H\,\frac{1}{2}\pi R^2 = \rho g H \pi R^2.$$

Напряжение, которое должен выдерживать шов в этом случае, равно

$$\sigma_б = \frac{\rho g H \pi R^2}{2\pi R} = \frac{1}{2}\rho g H R.$$

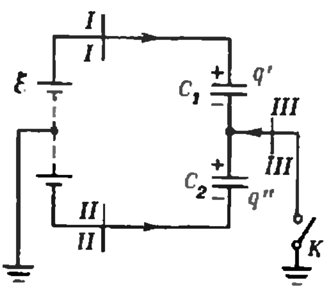
Так как $H \gg R$, то

$$\sigma_а \approx \sigma_б = \frac{1}{2}\rho g H R = 10^8\ \text{Н/м}.$$

Мы привели строгое решение задачи, справедливое для всех значений H. При $H \gg R$ ответ, конечно, можно получить сразу, без сложных вычислений, так как в этом случае можно считать, что давление во всех точках батискафа одно и то же.

◆

Ф562. *Конденсаторы емкостей $C_1 = 2{,}00$ мкФ и $C_2 = 3{,}00$ мкФ соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 120$ В, средняя точка которой заземлена. Провод, соединяющий конденсаторы, может быть заземлен с помощью ключа К. Найти заряды q_1, q_2 и q_3, которые пройдут после замыкания ключа через сечения I—I, II—II и III—III в направлениях, указанных на рисунке.*



До замыкания ключа заряды q обоих конденсаторов одинаковы (поскольку конденсаторы соединены последовательно) и равны

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,\mathscr{E}.$$

После замыкания ключа напряжения на конденсаторах станут равными $\frac{1}{2}\mathscr{E}$, и заряды конденсаторов будут равны

$$q' = \frac{1}{2} C_1 \mathscr{E} \text{ и } q'' = \frac{1}{2} C_2 \mathscr{E}.$$

Следовательно, через сечения $I - I$ и $II - II$ в заданных направлениях пройдут заряды

$$q_1 = q' - q = \frac{C_1 (C_1 - C_2)}{2 (C_1 + C_2)}\,\mathscr{E} = -2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

и

$$q_2 = q - q'' = \frac{C_2 (C_1 - C_2)}{2 (C_1 + C_2)}\,\mathscr{E} = -3{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

Суммарный заряд соединенных друг с другом пластин конденсаторов до замыкания ключа был равен нулю, а после замыкания ключа он стал равным $q'' - q'$. Такой заряд, очевидно, и прошел через сечение $III - III$, то есть

$$q_3 = q'' - q' = \frac{1}{2} (C_2 - C_1)\,\mathscr{E} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

И. Слободецкий

Задачи наших читателей

Используя неравенство Коши — Буняковского

$$(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_N^2) \times (B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_N^2) \geqslant (A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_N B_N)^2$$

(доказательство его см. в статье В. Левина «Парабола и неравенства» — «Квант», 1976, № 4; для $N = 2$ и $N = 3$ очевиден геометрический смысл этого неравенства: произведение длин двух векторов не меньше их скалярного произведения), решите следующие задачи:

1. Найдите наименьшие значения выражений

а) $(x+y)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2$, где a и b — параметры;

б) $(x+y+z)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2$, где a, b, c — параметры;

в) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 + \ldots + (x_n + a_n)^2$, где a_i — параметры.

При каких значениях переменных достигаются эти значения?

2. Докажите, что квадрат любого действительного корня многочлена

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

меньше суммы квадратов всех его коэффициентов.

Л. Пугач

Квант для младших школьников

Задачи

1. Из двадцати мальчиков нашего класса у четырнадцати — карие глаза, у пятнадцати — темные волосы, семнадцать мальчиков весят больше 40 кг и 18 мальчиков — выше 1 м 60 см. Докажите, что по крайней мере четверо мальчиков обладают всеми перечисленными признаками.

2. Если из некоторого числа вычесть 7, а остаток умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из данного числа 11, а остаток умножили на 11. Найдите это число.

3. Имеется 5 листов бумаги. Некоторые из них порвали на 5 кусков каждый. Некоторые из получившихся кусков снова порвали на 5 частей. И так далее. Можно ли, продолжая эту операцию, получить 1980 листочков?

4. Имеется некоторое количество гирь, массы которых не превосходят 10 кг. Известно, что если все гири каким-либо способом разбить на две кучки, то обязательно масса одной из кучек не превосходит 10 кг. Найти наибольшую общую массу всех гирь.

5. Расшифруйте ребус:

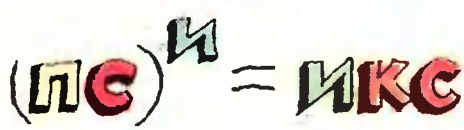
$$(\text{ПС})^{\text{И}} = \text{ИКС}.$$

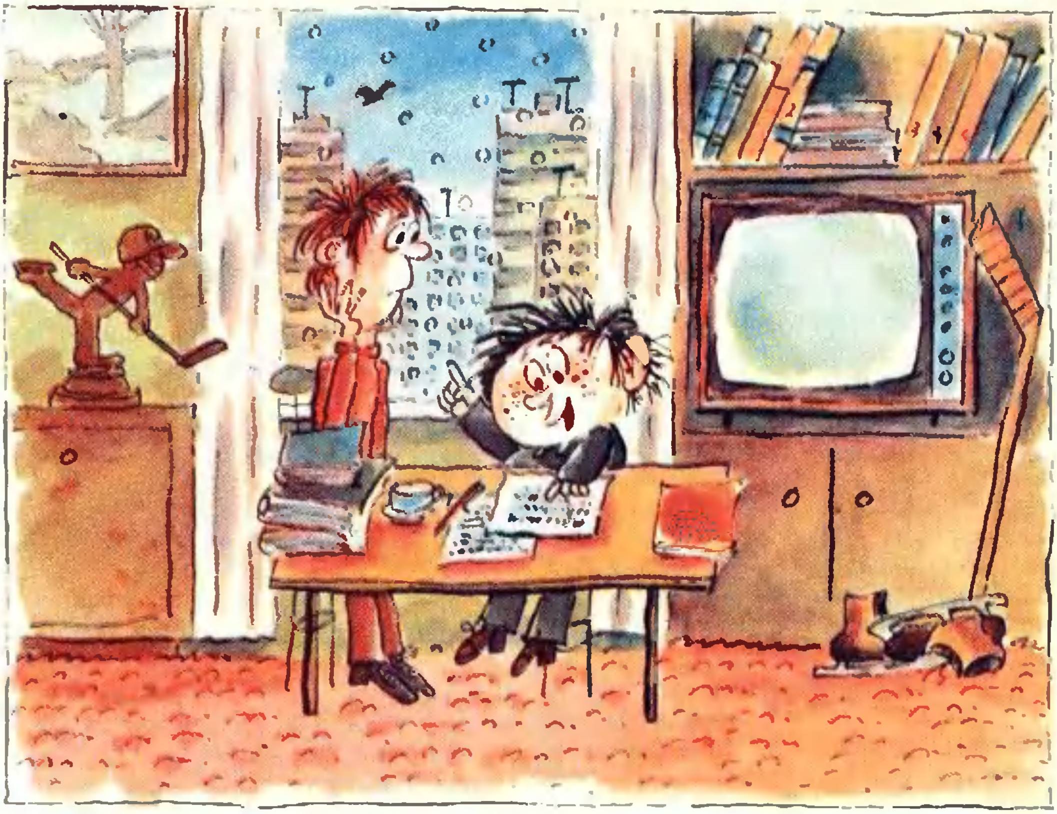
6. Четырехзначное число $A=\overline{abcd}$ является квадратом двузначного числа B. Четырехзначное число $A'=\overline{dcba}$ является квадратом некоторого двузначного числа, кратного числу B. Найдите числа A и B.

7. Имеет ли уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1980$$

решение в натуральных числах?





Д. Изаак, Т. Уткина

Кружочки Степы Мошкина

После факультатива по математике семиклассник Степа Мошкин зашел к своему однокласснику Олегу. Тот решил воспользоваться Степиным приходом.

— Дай списать геометрию, а то я ничегошеньки не понимаю.

— Думаешь, после этого ты станешь понимать ее лучше? — неожиданно возразил Степа, решивший на этот раз проявить сознательность.

— Ну как в этой геометрии разобраться? — воскликнул Олег.— Вот в алгебре, там куда ни шло, считай себе, пока ответ не получишь. А в геометрии перемещений ни увидишь, ни пощупаешь, а сейчас еще кружочки какие-то, эти, как их, композиции...

— Мы на факультативе как раз разбирали композиции перемещений. И знаешь — с ними точно, как в алгебре: считаешь, считаешь и ответ получаешь. Так здорово! Давай расскажу!

— Зачем мне твой факультатив? Ты лучше сказал бы, как домашние задания решать.

Ребята спорили не долго: энтузиазм Степы оказался сильнее лени Олега. Вскоре на столе появились листки для черновика, ручки и чистая двухконечная тетрадь в клеточку. Поначалу Степа пытался подражать Марии Васильевне, но быстро сбился на более вольную речь:

— Ты понимаешь, кружочек — это вроде как в алгебре умножение, операция такая между буквами,— начал Степа.— Только буквы не числа обозначают, а перемещения. И как в алгебре, скобки все равно как ставить.

Степа написал в чистовой тетради

$$R\circ(Q\circ P)=(R\circ Q)\circ P. \qquad (1)$$

— Это законом ассоциативности называется. А тождественное перемещение E, это когда все точки на месте остаются, вроде единицы

$$P\circ E=E\circ P=P. \qquad (2)$$

И у каждого перемещения P обратное есть, P^{-1} обозначается; для него

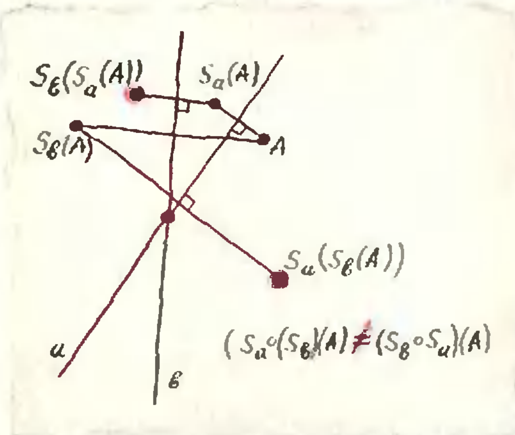
$$P\circ P^{-1}=P^{-1}\circ P=E. \qquad (3)$$

— Все понятно,— сказал Олег,— только вот чего ты самое простое свойство не привел?

И Олег написал на черновике $Q\circ P=P\circ Q$.

— Э нет, это как раз для перемещений не всегда верно,— сказал Степа. В чистовой тетради появилась такая запись с рисунком:

Пример. $S_a\circ S_b\neq S_b\circ S_a$.



В примере Олег быстро разобрался (а вы?); Степа же в чистовую тетрадь написал еще две строчки:

$$\begin{aligned} P=Q &\Leftrightarrow T\circ P=T\circ Q,\\ P=Q &\Leftarrow P\circ T=Q\circ T, \end{aligned} \qquad (4)$$

снабдив их таким комментарием:

— Как в алгебре: обе части равенства можно «умножить» на одно и то же перемещение, и сокращать тоже можно. Только с одной и той же стороны. Вот так: $P\circ T=T\circ Q\Rightarrow$ $\Rightarrow P=Q$ делать нельзя!

— Почему? — спросил Олег, но тут же сам себе ответил.— Если $T\circ Q\neq Q\circ T$, как в примере, то тогда чепуха получается.

Затем Степа решил проверить, какие перемещения все-таки знает Олег. Когда он выжал из Олега слова «центральная симметрия», ребята вспомнили обозначение Z_Q (для симметрии с центром Q), и Степа написал $Z_Q\circ Z_Q=?$ Олег, подумав немного, стер знак вопроса, и в тетрадке появилась такая запись:

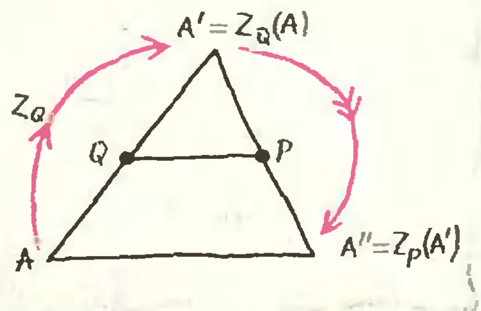
$$Z_Q\circ Z_Q=E. \qquad (5)$$

Тут Степа предложил более сложный вопрос: $Z_P\circ Z_Q=?$ Когда ребята разобрались с этим в черновике, Олег аккуратно записал:

Композиция двух центральных симметрий — перенос:

$$Z_P\circ Z_Q=2\overrightarrow{QP}. \qquad (6)$$

Под рисунком



Степа добавил доказательство: $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA''}=\overrightarrow{QA'}+$ $+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{A'P}=\overrightarrow{QP}+(\overrightarrow{QA'}+\overrightarrow{A'P})=$ $=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QP}$.

Следующий вопрос Степы вы, наверное, угадали: $Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=?$ Со Степиной подсказкой Олег решил и эту задачу; записал он результат так:

Композиция трех центральных симметрий — тоже центральная симметрия:

$$Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=Z_S, \qquad (7)$$

где S — такая точка, что

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}. \qquad (8)$$

Доказательство.

$$Z_Q\circ Z_R\underset{6,8}{=}Z_P\circ Z_S\Rightarrow Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=$$
$$=Z_P\circ Z_P\circ Z_S\underset{3}{\Rightarrow}Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=E\circ Z_S\underset{2}{=}Z_S.$$

— Мы с тобой так и будем под знаками $=$ и $\Rightarrow$ ставить цифирьки, чтобы не забыть, откуда у нас что получилось,— пояснил Степа.

Затем Олег вспомнил, что, кроме центральной, бывает и осевая симметрия: S_a; в тетрадь он тут же записал:

$$S_a\circ S_a=E. \qquad (9)$$

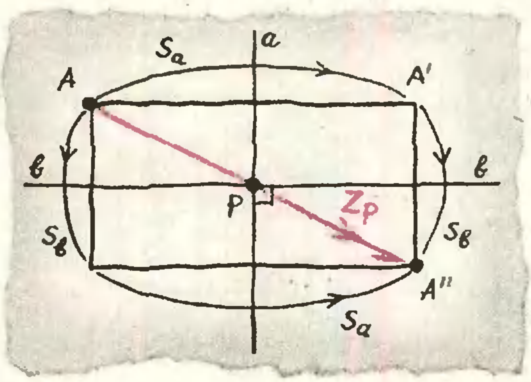
после чего ребята стали размышлять над вопросом $S_b\circ S_a=?$ Вспомнив факультатив, Степа предложил это сделать сначала в случае, когда $a\perp b$. В тетради вскоре появилась такая запись:

Композиция осевых симметрий с перпендикулярными осями — центральная симметрия:

$$S_b\circ S_a = S_a\circ S_b = Z_P, \qquad (10)$$

если $a\perp b$ *и* $P=a\cap b$.

Вместо доказательства они сделали рисунок.



А для случая $a\parallel b$ ребята написали:

Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями — параллельный перенос:

$$S_b\circ S_a = 2\overrightarrow{AB}, \qquad (11)$$

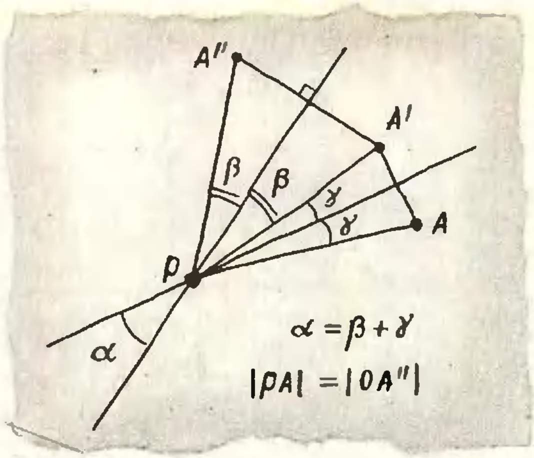
если $a\parallel b$, $A\in a$, $B\in b$, $(AB)\perp a$.

Доказательство. $S_b\circ S_a \underset{(2)}{=} S_b\circ(E\circ S_a) \underset{(9)}{=} S_b\circ((S_c\circ S_c)\circ S_a) \underset{(1)}{=} (S_b\circ S_c)\circ(S_c\circ S_a) \underset{(10)}{=} Z_B\circ Z_A \underset{(6)}{=} 2AB$, где $(AB)=c$.

— Вот видишь,— торжествовал Стена,— считаешь, считаешь, ответ получаешь! А наши ответы — равенства — тем хороши, что их можно в обе стороны читать. Вот последнее, например, можно прочитать так:

Всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых перпендикулярны направлению переноса и отстоят друг от друга на половину его длины.

Ребята вернулись к задаче "$S_b\circ S_a=?$" в общем случае, когда a пересекает b. Появилась новая запись, а вместо доказательства — рисунок:



Композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями — поворот:

$$S_b\circ S_a = R_P^{2\alpha}, \qquad (12)$$

где $P=a\cap b$ *и* α *— угол**) *между* a *и* b.

Стена объяснил, что и это соотношение можно «прочитать в другую сторону»: *поворот можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в центре поворота и угол между которыми равен половине угла поворота.*

Затем ребята занялись поворотом (R_P^α); в тетрадке появились следующие записи:

$$R_P^\alpha\circ R_P^{-\alpha} = E, \qquad (13)$$

$$R_P^\alpha\circ R_P^\beta = R_P^{\alpha+\beta}. \qquad (14)$$

Композиция двух поворотов — поворот:

$$R_Q^\beta\circ R_P^\alpha = R_T^{\alpha+\beta}, \qquad (15)$$

*если***) T *— точка пересечения прямых* $c=R_P^{\alpha/2}(a)$ *и* $b=R_Q^{\beta/2}(c)$, *где* $c=(PQ)$.

Доказательство. $R_Q^\beta\circ R_P^\alpha \underset{(12)}{=} (S_b\circ S_c)\circ(S_c\circ S_a) \underset{(1)}{=} S_b\circ(S_c\circ S_c)\circ S_a \underset{(9)}{=} S_b\circ S_a = R_T^{2(\alpha/2+\beta/2)} = R_T^{\alpha+\beta}$.

---

*) Ребята забыли написать, что берется наименьший угол между a и b.

**) Ребята забыли потребовать $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha+\beta<2\pi$.

— Ну как, понравилось? — спросил Степа, подводя итог импровизированному занятию.

— Здорово,— согласился Олег, а потом с грустью добавил: но домашнее задание я так и не сделал, а через пять минут «Спартак» — «Динамо» по первой программе...

— Ничего подобного, ты уже все сделал! Смотри: равенство (15) — это номер 781*), номер 770 — это (10), 772 — это (11).

— Но была еще задача, которую Мария Васильевна диктовала,— и Олег прочитал:

Задача. *Даны три точки A_1, B_1, C_1, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник ABC так, чтобы точки A_1, B_1, C_1 были серединами его сторон.*

— Так ее решение сразу следует из (7): ведь $Z_{A_1} \circ Z_{B_1} \circ Z_{C_1}$ будет симметрией относительно вершины B, которая поэтому строится по формуле (8). Понимаешь?

...Когда нападающий «Спартака» Якушев овладел шайбой после первого вбрасывания, оба товарища уже сидели перед телевизором.

*) «Геометрия 6—8», п. 54, с. 194.

Наша обложка

На первой странице обложки показано созданное компьютером совместно с художником изображение поверхности Штейнера, заданной уравнением 4 степени

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0. \quad (*)$$

Как нередко бывает, характерное по виду уравнение представляет интересный и тоже характерный геометрический образ.

На обложке показаны сечения поверхности семейством плоскостей, перпендикулярных одной из осей координат (Ox). Эти сечения напоминают «восьмерки», которые увеличиваются и переходят в подобие «бантиков» (невидимые части сечений ЭВМ не показала). На рисунках 1 и 2 поверхность показана в двух ракурсах.

Она пересекает оси координат x, y, z в 6 «особых» точках со значениями координат $1/2$ и $-1/2$. На интервалах между особыми точками, вдоль каждой координатной оси, поверхность самопересекается (рис. 1). В окрестности начала координат она близка к трем пересекающимся координатным плоскостям, что хорошо вид-

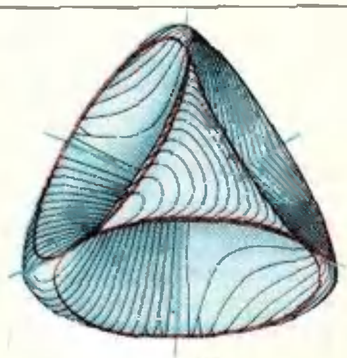


Рис. 1.

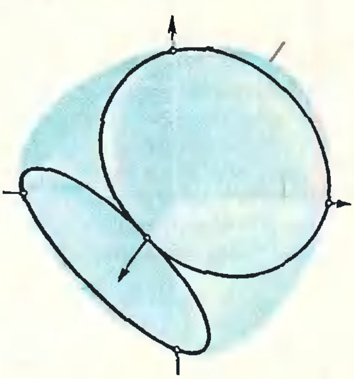


Рис. 2.

но на рисунке 2. Кроме того, поверхность содержит все три координатные оси, вписана в правильный тетраэдр (с центром в начале координат) и касается четырех его граней по четырем окружностям. Видимые окружности показаны на рисунке 1 красным цветом. Каждые две из этих окружностей имеют общую точку — одну из шести особых.

Поверхность Штейнера можно считать замкнутой (если исключить из рассмотрения принадлежащие ей координатные оси), она ограничивает четыре одинаковых тела, «состыкованных» ребрами (отрезками координатных осей). Если считать, что, двигаясь по какой-либо стороне поверхности, можно «проходить сквозь» пересекающую ее другую полость, то при таком движении легко попасть на противоположную сторону; наша поверхность, как лист Мёбиуса или бутылка Клейна, односторонняя.

В заключение — вопрос: какая получится поверхность, если в правую часть уравнения (*) вместо нуля поставить числа $+0{,}001$, $-0{,}001$? Если этот вопрос заинтересует вас и вы пришлете свои рисунки, мы попросим компьютер нарисовать эти поверхности более точно.

Ю. Котов

Десять лет издается «Квант» — и все десять лет на его страницах неизменно появляется рубрика «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с учащимися и педагогами, присылаемые в редакцию читательские анкеты показывают, что этот раздел вызывает большой интерес у многих юных читателей журнала.

И это вполне понятно: будущим абитуриентам (особенно тем, кто живет на селе, вдали от научно-педагогических центров) хочется узнать, какие задачи предлагают поступающим, что представляет собой приемный экзамен, как лучше к нему подготовиться. Редакция «Кванта» стремится,по возможности полно и всесторонне, отвечать на такие вопросы.

Прежде всего, в «Практикуме абитуриента» читатели найдут статьи, посвященные подробному разъяснению наиболее важных и сложных вопросов программ вступительных экзаменов по математике и физике, разбору типичных задач, главным образом взятых непосредственно из вариантов приемных экзаменов в вузы, анализу характерных, особенно часто встречающихся ошибок абитуриентов. Кроме того, на страницах этого раздела будут регулярно помещаться тексты задач вариантов письменных экзаменов и образцы задач устных экзаменов, которые предлагались в прошлом году в различных высших учебных заведениях нашей страны.

Познакомившись с публикациями «Практикума абитуриента», читатели смогут легко убедиться, что для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно было бы просто еще раз прочесть школьные учебники,— необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Этого можно достичь лишь настойчивым, упорным трудом, систематическими, планомерными занятиями в течение всего оставшегося до экзаменов времени.

Статьи «Практикума абитуриента» не могут (да и не ставят такой цели) заменить собой школьные учебники. Они написаны в расчете на то, что читатель уже усвоил школьные курсы математики и физики и хотел бы найти дополнительные пояснения и задачи для самостоятельного решения. Кроме материалов, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в следующих номерах журнала, при подготовке к вступительным экзаменам полезно было бы познакомиться и с некоторыми статьями «Кванта», публиковавшимися в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен ниже; в списке указаны год, номер журнала и страница, где статья начинается. (Следует иметь в виду, что в статьях, опубликованных до 1977 года, иногда встречаются термины и обозначения, отличающиеся от принятых в школе сейчас; мы надеемся, что внимательный читатель легко преодолеет это затруднение.)

Математика

Числа, арифметика, алгебра: 1970, № 3, с. 53; 1972, № 3, с. 50; 1972, № 6, с. 30; 1972, № 9, с. 45; 1974, №9, с. 70; 1975, № 3, с. 72; 1975, № 8, с. 59; 1977, № 5, с. 45;

Функции: 1970,№1,с.27; 1970,№2,с.3; 1971,№2,с.37; 1971,№9,с.41; 1971,№11, с. 48; 1972, № 5, с. 36; 1972, № 12, с. 19; 1973, № 4, с. 57; 1973, № 5, с. 38; 1974, № 12, с. 66; 1975, № 2, с. 43; 1975, № 4, с. 37; 1976, № 10, с. 41; 1976, № 11, с. 47; 1976, № 12, с.34; 1977,№1,с.43; 1977,№4,с.38; 1978,№2,с.49; 1978,№3,с.38; 1978,№10,с.54.

Уравнения и неравенства: 1970, № 4, с. 41; 1970, № 5, с. 48; 1971, № 3, с. 40; 1971, № 4, с. 43; 1971, № 5, с. 40; 1971, № 6, с. 46; 1971, № 10, с. 45; 1972, № 1, с. 46; 1972, № 12, с. 49; 1973, № 2, с. 58; 1976, № 3, с. 51; 1977, № 3, с. 56; 1977, № 9, с. 53; 1978, № 6, с. 53; 1979, № 2, с. 48; 1979, № 5, с. 43; 1979, № 9, с. 29; 1979, № 12, с. 34.

Предел, производная, первообразная: 1974, № 11, с. 54; 1975, № 12, с. 10; 1977, № 1, с. 36; 1977, № 2, с. 35; 1977, № 4, с. 46; 1977, № 5, с. 30; 1977, № 12, с. 40; 1978, № 5, с. 44; 1978, № 6, с. 60; 1978, № 9, с. 53; 1978, № 10, с. 62; 1978, № 11, с. 28; 1979, № 2, с. 40; 1979, № 3, с. 41; 1979, № 6, с. 24; 1979, № 10, с. 36.

Геометрия: 1970, № 2, с. 23; 1970, № 11, с. 54; 1971, № 1, с. 28; 1971, № 6, с. 52; 1971, № 12, с. 41; 1972, № 2, с. 60; 1972, № 4, с. 54; 1972, № 7, с. 40; 1972, № 11, с. 52; 1973, № 10, с. 56; 1974, № 2, с. 46; 1974, № 5, с. 58; 1974, № 9, с. 53; 1974, № 10, с. 32; 1974, № 12, с. 55; 1975, № 1, с. 55; 1975, № 3, с. 61; 1975, № 7, с. 30; 1975, № 10, с. 48; 1975, № 11, с. 45; 1975, № 12, с. 46; 1976, № 1, с. 61; 1976, № 2, с. 46; 1976, № 5, с. 57; 1976, № 7, с. 21; 1976, № 9, с. 56; 1976, № 10, с. 46; 1976, № 12, с. 50; 1977, № 2, с. 47; 1977, № 3, с. 38; 1977, № 10, с. 48; 1977, № 11, с. 82; 1977, № 12, с. 48; 1978, № 1, с. 47; 1978, № 2, с. 36; 1978, № 3, с. 48; 1978, № 4, с. 36; 1978, № 11, с. 42; 1979, № 1, с. 45; 1979, № 3, с. 51; 1979, № 5, с. 34; 1979, № 6, с. 33; 1979, № 9, с. 38; 1979, № 10, с. 44; 1979, № 11, с. 41.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1972, № 6, с. 44; 1972, № 10, с. 47; 1973, № 1, с. 35; 1973, № 3, с. 44; 1973, № 8, с. 71; 1973, № 11, с. 52; 1973, № 12, с. 39; 1974, № 1, с. 53; 1974, № 3, с. 48; 1976, № 2, с. 61; 1976, № 3, с. 69; 1976, № 4, с. 40; 1976, № 6, с. 49; 1976, № 9, с. 59; 1977, № 6, с. 71; 1977, № 9, с. 44; 1978, № 1, с. 36; 1978, № 2, с. 34; 1978, № 4, с. 48; 1978, № 6, с. 32; 1978, № 7, с. 44; 1978, № 12, с. 34; 1979, № 4, с. 48; 1979, № 7, с. 37.

Физика

Механика: 1970, № 6, с. 39; 1971, № 2, с. 44; 1971, № 5, с. 50; 1971, № 9, с. 47; 1971, № 11, с. 54; 1972, № 3, с. 58; 1972, № 9, с. 51; 1973, № 9, с. 68; 1973, № 11, с. 57; 1974, № 3, с. 52; 1974, № 11, с. 60; 1975, № 1, с. 60; 1976, № 12, с. 40; 1977, № 2, с. 50; 1977, № 3, с. 46; 1977, № 11, с. 77; 1977, № 12, с. 52; 1978, № 3, с. 54; 1978, № 11, с. 48; 1978, № 12, с. 42; 1979, № 10, с. 49.

Жидкости и газы: 1972, № 12, с. 53.

Молекулярная физика; тепловые явления: 1972, № 5, с. 45; 1973, № 1, с. 43; 1974, № 1, с. 60; 1976, № 3, с. 58; 1977, № 6, с. 67; 1978, № 1, с. 42; 1979, № 1, с. 50.

Основы электродинамики: 1972, № 2, с. 54; 1972, № 4, с. 62; 1972, № 6, с. 55; 1972, № 6, с. 59; 1972, № 7, с. 48; 1972, № 7, с. 51; 1973, № 3, с. 50; 1973, № 7, с. 35; 1974, № 5, с. 64; 1975, № 4, с. 41; 1975, № 12, с. 51; 1978, № 4, с. 42; 1978, № 5, с. 38; 1979, № 2, с. 52; 1979, № 3, с. 45; 1979, № 4, с. 43.

Колебания и волны: 1974, № 6, с. 31; 1976, № 2, с. 51.

Оптика: 1971, № 7, с. 41; 1977, № 4, с. 50; 1979, № 5, с. 39; 1979, № 6, с. 30.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 50; 1972, № 6, с. 62; 1972, № 10, с. 52; 1973, № 4, с. 52; 1973, № 5, с. 43; 1973, № 7, с. 30; 1975, № 5, с. 60; 1975, № 11, с. 50; 1978, № 6, с. 65; 1979, № 7, с. 41.

Н. Виленкин

Три точки, три точки, три точки...

Однажды во время приемных экзаменов в вуз, в котором математика изучается весьма глубоко и потому к поступающим предъявляют высокие требования, одному абитуриенту задали вопрос, совсем простой на первый взгляд:

Сколько решений имеет уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$?

Поскольку решение уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ равносильно отысканию абсцисс точек, в которых пересекаются графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, экзаменующийся сделал эскиз графиков функций $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ (рис. 1) и сказал:

«Это уравнение имеет одно решение. При этом, поскольку по определению логарифма функции $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ обратны друг другу, их графики симметричны относительно прямой $y = x$, а потому точка пересечения графиков лежит на этой прямой. Значит, чтобы найти ее, надо решить уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$. Но как его решать, я не знаю».

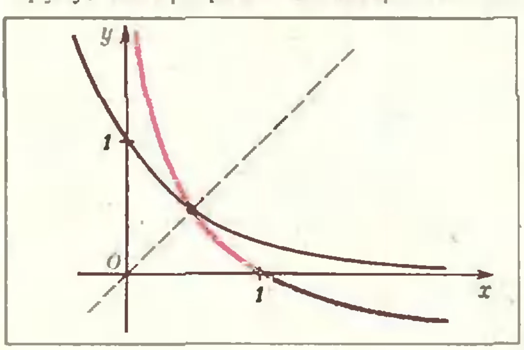


Рис. 1.

Экзаменатор ответил:

«То, что Вы не умеете решать уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$,— не беда, мы этого не требуем: оно не решается элементарными методами. Хуже то, что Вы пропустили два его решения: $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$. Подставьте эти значения в уравнение, проверьте!»

И действительно, написав равенства $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}$ и $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4}$, абитуриент с огорчением обнаружил, что они истинны: $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ и $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Таким образом, его обманула «наглядность»: графики функций $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ пересекаются не только в точке $P\ (b; b)$, но еще в двух точках: $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ и $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, симметричных относительно прямой $y = x$.

Причина ошибки абитуриента состоит в следующем. Он знал, что при $0 < a < 1$ значения функции $y = \log_a x$ неограниченно увеличиваются по мере приближения x к нулю, а функция $y = a^x$ при $x = 0$ принимает значение 1. Отсюда он сделал «вывод», что на всем промежутке $]0; b[$, где b — абсцисса точки P, $a^x < \log_a x$, и потому иных точек пересечения, кроме P, графики этих функций не имеют. Однако сделать этот вывод столь же логично, как, глядя на заключительную таблицу чемпионата СССР по футболу, сделать вывод, что победившая команда была впереди и после первого круга — как известно, очки по осени считают.

Оказалось, что при $a = \frac{1}{16}$ графики рассматриваемых функций ведут

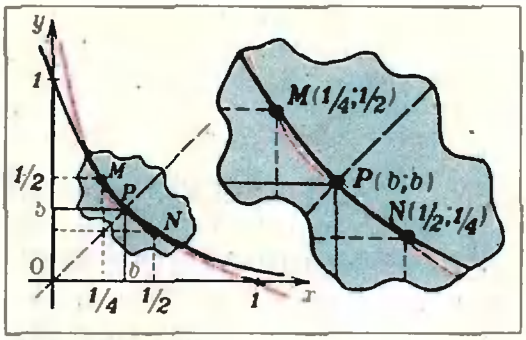


Рис. 2.

себя куда хитрее (рис. 2): на промежутке $]0;\ \frac{1}{4}[$ выше расположен график функции $y=\log_{\frac{1}{16}}x$, на промежутке $]\frac{1}{4};\ b[$ «в лидеры» выходит функция $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$, на промежутке $]b;\ \frac{1}{2}[$ снова выше график функции $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ и лишь на луче $[\frac{1}{2};\ +\infty[$ функция $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ окончательно становится лидером — на всем этом луче ее график выше графика функции $y=\log_{\frac{1}{16}}x$.

В данном случае во взаимном расположении графиков удалось разобраться, непосредственно найдя корни уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$. При других значениях a дело обстоит хуже, и ответить без подробного исследования, сколько точек пересечения имеют графики функций $y=\left(\frac{1}{15{,}5}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{15,5}}x$ или графики функций $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{10}}x$, весьма сложно. Мы расскажем сейчас, как это исследование проводится с помощью производных*). Сейчас нас интересует только случай $0<a<1$.

Обозначим $\ln a$ через $-k$**). Тогда функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ запишутся так: $y=e^{-kx}$ и $y=-\frac{\ln x}{k}$. Отыскание точек пересечения их графиков равносильно отысканию точек, в которых график функции $F(x)=e^{-kx}+\frac{\ln x}{k}$ пересекает ось абсцисс, а это последнее связано с изучением промежутков возрастания и убывания функции F. Для этого мы найдем производную:

$$F'(x)=-ke^{-kx}+\frac{1}{kx}=$$

$$=\frac{1-k^2xe^{-kx}}{kx}. \qquad (1)$$

Разберем три случая.

Первый случай: $0<k<e$. Покажем, что в этом случае $F'(x)>0$ для всех $x>0$. Для этого достаточно доказать, что наименьшее значение функции $1-k^2xe^{-kx}$ при $x>0$ положительно. Это наименьшее значение достигается в точке, где $(1-k^2xe^{-kx})'=0$, то есть, где $-k^2e^{-kx}+k^3xe^{-kx}=0$. Решая это уравнение, находим $x=\frac{1}{k}$. При этом значении x числитель в (1) равен $1-ke^{-1}$, что при $k<e$ положительно. Поскольку это значение наименьшее, то $F'(x)>0$ для всех $x>0$.

Из того, что $F'(x)>0$ при $x>0$, следует, что функция F возрастает на луче $]0;\ +\infty[$ и ее график ровно один раз пересечет ось абсцисс*). Таким образом, при $0<k<e$ *графики функций* $y=e^{-kx}$ *и* $y=-\frac{\ln x}{k}$ *пересекаются лишь один раз*, а именно на прямой $y=x$ (так, как на рисунке 1).

Второй случай: $k>e$. Здесь дело обстоит сложнее. Обозначим через b абсциссу точки пересечения

*) См. также «Квант», 1977, № 10, с. 37.

**) Так как $0<a<1$, $\ln a<0$.

*) Это следует, например, из п. 84 пособия «Алгебра и начала анализа 10».

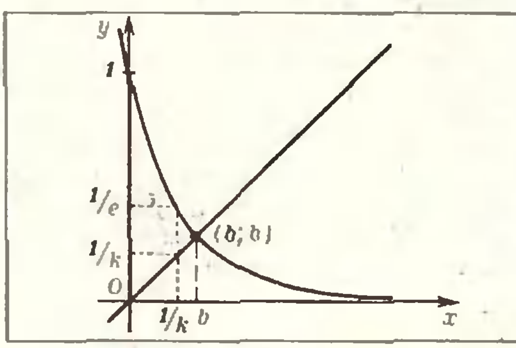


Рис. 3.

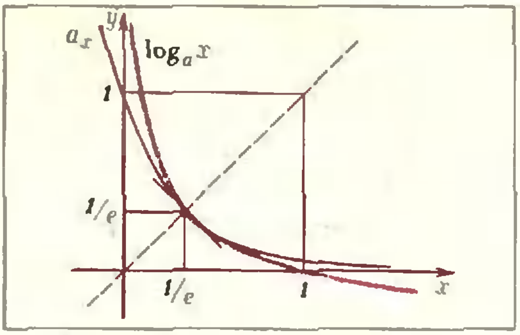


Рис. 4.

графиков $y=e^{-kx}$ и $y=x$. В этой точке $e^{-kb}=b=-\frac{\ln b}{k}$, и потому $kb=-\ln b$. При $x=\frac{1}{k}$ функция e^{-kx} равна $\frac{1}{e}$, а функция $y=x$ принимает значение $\frac{1}{k}$, поэтому в силу условия $k>e$ абсцисса точки пересечения графиков функций $y=e^{-kx}$ и $y=x$ больше, чем $\frac{1}{k}$ (рис. 3), то есть $b>\frac{1}{k}$. Но тогда $kb>1$, и потому

$$F'(b)=\frac{1-k^2be^{-kb}}{kb}=$$

$$=\frac{1-k^2b^2}{kb}<0.$$

Значит, при $k>e$ производная функции F в точке $x=b$ отрицательна. Поскольку $F(b)=0$, слева от b найдутся точки, где $F(x)>0$. Так как по мере приближения x к нулю $F(x)$ становится отрицательным, существует по крайней мере одна точка c, лежащая между 0 и b, в которой $F(x)=0$*). Это показывает, что при $k>e$ графики функций $y=e^{-kx}$ и $y=-\frac{\ln x}{k}$ пересекаются по крайней мере в одной точке, не лежащей на прямой $y=x$. Из того, что эти графики симметричны друг другу относительно прямой $y=x$, вытекает наличие еще одной точки пересечения. Можно доказать, что иных точек пересечения, кроме этих трех, графики не имеют (доказательство связано с изучением второй производной функции F).

*) См. предыдущую сноску.

Итак, если $k>e$, рассматриваемые *графики имеют ровно три точки пересечения.*

Третий случай: $k=e$. В точке пересечения $(b;\ b)$ графиков функций e^{-kx} и $-\frac{\ln x}{k}$ имеем $e^{-kb}=b$ или, в нашем случае, $e^{-eb}=b$. Непосредственной подстановкой проверяется, что число $\frac{1}{e}$ является корнем уравнения $e^{-ex}=x$. Поскольку функция e^{-ex} убывает (на всей прямой), а функция x возрастает, уравнение $e^{-ex}=x$ имеет не больше одного корня. Значит, $b=\frac{1}{e}$. Легко проверить, что $F(b)=F'(b)=0$, поэтому график функции F при $x=b=e^{-1}$ касается оси абсцисс.

В нашем случае $F(x)=e^{-ex}+\frac{1}{e}\ln x$. Поэтому

$$F'(x)=-e^{1-ex}+\frac{1}{ex}=$$

$$=\frac{e^{ex-2}-x}{xe^{ex-1}}.$$

Производная функции $e^{ex-2}-x$ отрицательна при $x<b$, равна 0 при $x=b$ и положительна при $x>b$. Поэтому функция $e^{ex-2}-x$ положительна при всех $x\neq b$. Значит, при всех положительных $x\neq b$ имеем $F'(x)>0$. Следовательно, график функции F, касаясь оси абсцисс в точке $x=b$, при переходе через точку b меняет знак с минуса на плюс.

В соответствии с этим графики функций $y=e^{-ex}$ и $y=-\frac{\ln x}{e}$, касаясь друг друга в их общей точке $(e^{-1};\ e^{-1})$, «переплетаются» друг с другом (рис. 4).

Подведем итог: *если* $1>a\geqslant e^{-e}\approx\approx\frac{1}{15,18}$, *то графики функций* $y=a^x$ *и* $y=\log_a x$ *имеют одну точку пересечения; если же* $e^{-e}>a>0$,— *то три точки пересечения.*

Теперь можно с уверенностью сказать, что графики функций $y=\left(\frac{1}{15,5}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{15,5}}x$ имеют три точки пересечения, а графики функций $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{10}}x$ — лишь одну общую точку.

Московский инженерно-физический институт

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1979 года.

Математика

Письменный экзамен

Вариант

1. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два пешехода. Когда пешеход, вышедший из A, прошел $1/3$ пути, второй пешеход находился в 3 км от середины пути. Найдите расстояние между A и B, если известно, что, когда пешеход, вышедший из B, прошел половину пути, первый пешеход находился от него на расстоянии 2 км. Скорости пешеходов постоянны.

2. В правильной треугольной пирамиде длина радиуса круга, вписанного в основание, равна r, а величина угла между плоскостями боковых граней пирамиды равна φ. Определите длину ребра куба, объем которого в $\sqrt{3}$ раз больше объема данной пирамиды.

3. Найдите A, B, C такие, чтобы функция вида

$$f(x)=Ax^2+Bx+C$$

удовлетворяла условиям $f'(1)=8$, $f(2)+f''(2)=33$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

4. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin 2x$, прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=a$ и осью абсцисс, равна 0,5. Определите a.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Верхний конец однородного стержня свободно поворачивается вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 1). Нижним концом стержень опирается на брусок, лежащий на гладком столе. Масса стержня $m=1{,}50$ кг, угол между стержнем и вертикалью $\alpha=30^\circ$. Если брусок потянуть вправо с силой $\vec{F}$ ($|\vec{F}|\geqslant 2{,}45$ Н), он сдвигается с места. С какой силой давит стержень на брусок во время его движения?

2. Газообразный водород массой $m=1$ кг при начальной температуре $T_1=300$ К охлаждают изохорически так, что его давление падает в $\eta=3$ раза. Затем газ расширяют при постоянном давлении. Найти произведенную газом работу, если в конечном состоянии его температура оказалась равной первоначальной.

3. На тонкой изолирующей нити длиной $l=60$ см подвешен заряженный электричеством небольшой шарик массой $m=20$ мг. На расстоянии l от подвешенного шарика в одной с ним горизонтальной плоскости находится металлическая сфера радиусом $a=3$ см (рис. 2). Если зарядить сферу, подав на нее напряжение $U=8$ кВ относительно Земли, нить с шариком отклоняется от вертикали на максимальный угол 90°. Найти заряд q на шарике.

4. В установке, показанной на рисунке 3, точечный источник света S находится на главной оптической оси тонкой линзы на расстоянии $|SO|=a=0{,}6$ м от нее. Оптическая сила линзы $D=2$ дптр. За линзой расположено плоское зеркало, нормаль $\vec{n}$ к которому составляет угол $\alpha=15^\circ$ с главной оптической осью линзы. Расстояние от линзы до зеркала $|ON|=l=1$ м. Зеркало вращают с постоянной угловой скоростью вокруг главной оптической оси линзы, при этом изображение источника движется равномерно по окружности со скоростью $v=0{,}31$ м/с. Найти период вращения зеркала.

А. Александров, А. Забоев, Н. Шолохов

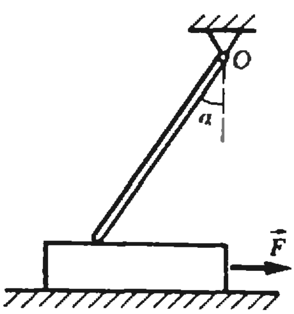


Рис. 1.

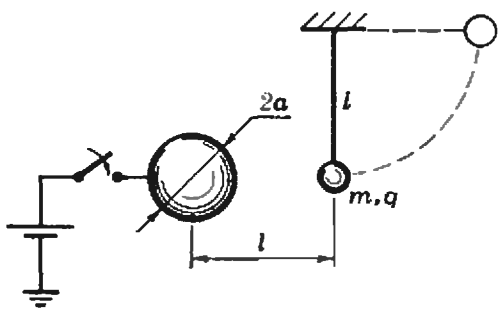


Рис. 2.

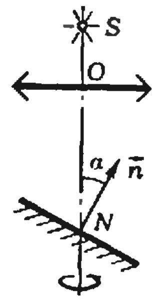


Рис. 3.

Раздел «Искусство программирования» ведется в нашем журнале начиная с № 9 прошлого года. Его цель двоякая: во-первых, разъяснить общие вопросы, связанные с ЭВМ,— что такое алгоритм и программа, что такое память и процессор компьютера, как взаимодействуют человек и машина; во-вторых, обучить некоторым машинным языкам, научить писать программы и отлаживать их на реальных ЭВМ.

Развивать эти навыки призвана «Заочная школа программирования» (см. «Квант», 1979, № 9). Новые подписчики «Кванта» могут включиться в нее начиная с этого урока, если они самостоятельно ознакомятся с основными идеями программирования на языке Робик («Квант», 1979, № 9—11).

Напоминаем нашим старым учащимся и сообщаем новым, что все задания одного номера следует выполнять В ОДНОЙ УЧЕНИЧЕСКОЙ ТЕТРАДИ (а не на отдельных листках!) и высылать нам простым (НЕ ЗАКАЗНЫМ!) письмом (не бандеролью) не позже 20 числа следующего месяца, написав на конверте в правом нижнем углу слово «КВАНТ», по адресу: 630090, Новосибирск 90, проспект Науки 6, ВЦ СО АН, отдел информатики, Заочная школа программирования. Просим вложить в ваше отправление конверт с вашим адресом и 6-копеечной маркой для ответа.

Новым учащимся к заданиям 5 урока следует приложить заявление, написанное по образцу, указанному в «Кванте», 1979, № 9, с. 45.

Заочная школа программирования

Урок 5: Основные операторы учебно-производственного языка Рапира

На предыдущих уроках мы познакомились с учебным языком Робик, предназначенным для обучения основным понятиям программирования и важнейшим навыкам, необходимым для решения задач на ЭВМ. Сегодня мы приступаем к изучению нового, значительно более мощного языка, позволяющего решать не только учебные, но и практически важные научные и производственные задачи.

Прежде, чем читать дальше, проверьте себя, ответив на следующие вопросы:

1. Что такое предписание? процедура? оператор? директива?

2. Как описывать и как вызывать процедуры в Робике?

3. Как составлять и читать синтаксические диаграммы?

4. Что такое имя? Что может быть значением имени? Как присвоить имени новое значение?

5. Как записывается и как выполняется предписание присваивания? предписание печати? условное и циклическое предписание?

6. Что такое параметры и для чего они используются?

Если какие-то из этих вопросов вызвали у вас затруднения, перечитайте материалы уроков 1—4 («Квант», 1979, №№ 9—11).

Основные правила языка Рапира

Основные правила языка Рапира очень похожи на правила Робика. Любая программа состоит из п р е д п и с а н и й; после каждого из них ставится точка с запятой. Предписания состоят из отдельных слов. Под *словами* в большинстве языков программирования, в том числе в Робике и Рапире, подразумевают *числа, тексты, имена, специальные знаки* (например, скобки, знаки арифметических операций и т. д.) и так называемые *ключевые слова* (например, слова ЕСЛИ, ТО, ИНАЧЕ в условном операторе Робика). Правила записи слов в Рапире в основном знакомы вам по Робику:

Имена состоят из букв и цифр, причем первым символом в имени должна быть буква, например:

А5, ЗАЯЦ, ЛІДІ, ПУТЬ, ВРЕМЯ.

Число символов в имени может быть любым, но машина различает имена по первым шести символам, так что с ее точки зрения имена

КРОКОДИЛ, КРОКОДИЛ5,
КРОКОД и КРОКОДИЛЬЧИК

— это одно и то же имя. Во избежание ошибок не рекомендуется без крайней необходимости употреблять в программе имена длиннее шести символов. Кроме того, запрещено употреблять имена, совпадающие с ключевыми словами. Слово ЕСЛИ, например, не может быть именем.

Тексты состоят из любых символов, заключенных в апострофы:

'ЭТО ТЕКСТ НА РАПИРЕ'
'A+B+C9090=33/— /'.

Числа состоят из цифр; для отделения целой части от дробной используется **точка:**

2.521 21393 2345.00098

В числах должно быть не больше 12 цифр.

Со специальными знаками и ключевыми словами мы познакомимся по мере изучения отдельных предписаний.

В Рапире, в отличие от Робика, разрешается располагать несколько предписаний на одной строке или, наоборот,— одно предписание записывать в несколько строк. Переходить на новую строку можно в любом месте предписания, но разрывать слова языка при этом нельзя.

Предписание присваивания

Знакомство с предписаниями языка Рапира мы начнем с предписания присваивания. Его синтаксическая диаграмма очень проста и напоминает сокращенную до предела диаграмму соответствующего предписания Робика:

Стрелка —> читается «присвоить». На клавиатуре обычных терминалов такого знака нет, так что для изображения стрелки приходится нажимать две клавиши: «—» (минус) и «>» (больше).

В отличие от Робика, значением переменного поля выражение в Рапире может быть не только имя, число или строка, но и любая последовательность чисел и имен, соединенных правильно расставленными знаками арифметических операций и круглыми скобками. В математике такая конструкция называется, как известно, *арифметическим выражением*. (Несколько позже мы встретимся и с другими разновидностями выражений в Рапире.)

В языке Рапира используются следующие знаки арифметических операций:

\+ сложение
— вычитание
* умножение
/ деление
! возведение в степень*)

Порядок выполнения операций такой же, как обычно в математике; сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и в последнюю очередь — сложение и вычитание; при этом, как обычно, учитывается наличие скобок. Результат присваивается имени, стоящему после стрелки.

Ясно, что специальные вычислительные операторы (СЛОЖИТЬ, ВЫЧЕСТЬ и т. д.), имеющиеся в Робике, оказываются совершенно ненужными в Рапире: любые вычисления могут быть исполнены в самом операторе присваивания, при этом формулы записываются почти так же, как в школьной математике.

---

*) Например, A^2 записывается так: $A!2$.

Например, для вычислений по формуле

$$У = 2{,}781 \cdot 250 + 500 - 92{,}5$$

достаточно написать

2.781*250+500—92.5—>У

При переходе от математической записи к программе на Рапире следует учитывать, однако, что знак умножения в Рапире, в отличие от обычной математики, нельзя пропускать: вместо 2AB нужно писать 2*A*B, вместо $(A+B)(A-B)$ пишется $(A+B)*(A-B)$.

→Задание 5.1. *Записать на языке Рапира последовательность предписаний для вычислений по формулам:*

$$A = 15;\ B = 24;$$

$$C = 3A + A^3B^2 + (A+B)^5 - \frac{A^6}{25} + 33A^6;$$

$$K = 8C + A^2(A+B+C)^7 - 33 + \frac{(76A-34)}{58} + C^9;$$

$$Л = \frac{K^8}{38} + \frac{5A}{8} + (A+K+B)^9 - 76 + 58C;$$

→Задание 5.2. *Составить таблицу значений имен и определить, чему будут равны значения этих имен после исполнения программы:*

2—>A; A!2—>B;
B*A+(B+A+B)*A!2+A—>A
A*B—>C
C*2+B*8+C*2+A/2—>A

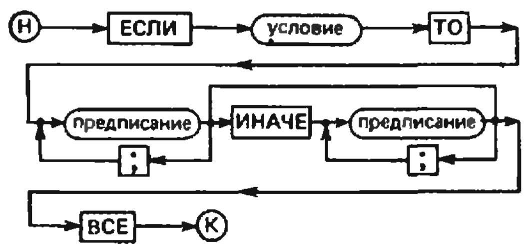
Задание 5.3. *Записать на Рапире формулы для отыскания корней X1 и X2 квадратного уравнения**) $Ax^2+Bx+C=0$.

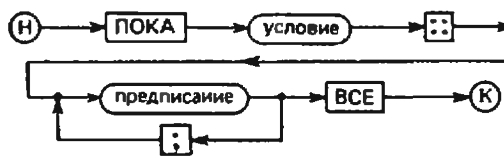
(Указание для шести- и семиклассников: $\sqrt{A}$ можно записать в виде $A^{1/2}$.)

*) Сообщаем шестиклассникам эту формулу $X_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

Условное предписание и цикл

Условное и циклическое предписания в Рапире выглядят так:

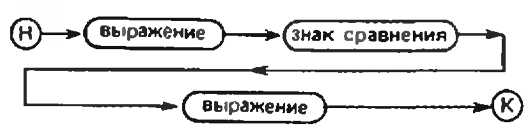




Специальный знак :: (два двоеточия) в циклическом предписании читается «повторять».

Основное отличие этих диаграмм от диаграммы Робика, как легко заметить, состоит в том, что после слов ТО и ИНАЧЕ в условном предписании и после знака :: в циклическом может стоять любое число предписаний, разделенных точками с запятой, а не одно-единственное предписание, как в Робике. В конце обоих предписаний ставится ключевое слово ВСЕ.

Условие в простейшем случае имеет вид:



В Рапире используются такие знаки сравнения:

= равно
/= не равно
> больше
< меньше
>= больше или равно
=< меньше или равно

Например, после выполнения предписания

ЕСЛИ A>B ТО B—>C
ИНАЧЕ A—>C ВСЕ;

значение имени *C* станет равным меньшему из значений имен *A* и *B*.

Рассмотрим более подробно работу такой программы:

```
1—>X; 0—>C;
ПОКА X<1000:: 1/X+C—>C;
X+1—>X ВСЕ;
```

После выполнения первых двух предписаний таблица имен будет иметь такой вид:

ИМЯ	ЗНАЧЕНИЕ
X	1
C	0

Теперь начинает работу циклическое предписание. Прежде всего проверяется условие

$$X<1000$$

Значение X, как видно из таблицы, равно 1, так что условие и с т и н н о и все предписания вплоть до ключевого слова ВСЕ будут выполняться. После этого таблица станет такой:

ИМЯ	ЗНАЧЕНИЕ
X	~~1~~ 2
C	~~0~~ 1

На следующем шаге снова проверяется условие. Оно по-прежнему истинно, так что те же самые предписания выполняются еще раз. Очевидно, так будет повторяться до тех пор, пока значение X не окажется равным (или большим) 1000. При этом условие станет л о ж н ы м и выполнение цикла закончится. Значением имени X при этом останется число 1000, а значением имени C будет сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{999}.$$

Если у вас есть время и желание, можете подсчитать вручную значение этой суммы и заметить, сколько времени у вас на это уйдет. Для сравнения: на ЭВМ БЭСМ-6 по этой программе получилось $C=7.48447$ (с точностью до 5 знаков после точки) за сотую долю секунды.

→З а д а н и е 5.4. *Значениями имен А и В являются различные числа. Запишите предписание, после выполнения которого значение имени МИН станет равным меньшему, а значение МАКС — большему из этих чисел.*

→З а д а н и е 5.5. *Составьте программу для вычисления суммы квадратов целых чисел от 1 до 100 включительно.*

→З а д а н и е 5.6. *Составьте программу для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел А и В.*

Г. Звенигородский

Задачи наших читателей

1. Назовем число (день) месяца «правильным», если остаток от его деления на 7 совпадает с номером дня недели (воскресенье — нулевой день, понедельник — первый и т. д.). Назовем неделю «правильной», если все ее дни «правильные». Какой ближайший в будущем год содержит

а) максимальное число «правильных» дней;

б) максимальное число «правильных» недель?

Г. Гольдфайн

2. Докажите, что в арифметической прогрессии

1, 14, 27, 40, ...

бесконечно много членов, записываемых одними двойками. Найдите общий вид этих членов.

Д. Нямсуриж

3. Докажите, что в последовательности

31, 331, 3331, 33331, ...

найдется бесконечно много членов, делящихся на 31, и ни одного, делящегося на 13.

И. Суев

4. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных, соответственно, около треугольников ABC и ABD равны R и r.

И. Коршак

5. В некотором царстве $3n!$ городов и n видов транспорта ($n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$; читается: «эн-факториал»). Любые два города связаны между собой только одним видом транспорта. Докажите, что всегда найдется такой город, выехав из которого можно побывать не менее чем в двух городах и вернуться обратно, не меняя вида транспорта.

В. Губа

А. Салихова, Н. Соколова

Графическая система Шпага

На обложках нашего журнала неоднократно публиковались рисунки, выполненные ЭВМ. Программы для «компьютеров-художников» составляли опытные программисты при помощи довольно сложных языков программирования и систем машинной графики.

Многие рисунки для раздела «Искусство программирования» тоже выполнены ЭВМ, но по программам, авторам которых — от 8 до 15 лет. На нашей фотографии показана группа юных программистов за работой у графопостроителя. Крайняя слева школьница — семиклассница Ася Салихова и ее подруга восьмиклассница Наташа Соколова разработали набор процедур графической системы Шпага, с использованием которой пишутся программы нашей машинной графики.

Статьей об этой системе, написанной ее разработчицами, и открывается подраздел «Трибуна юного программиста».

Система Шпага — это набор процедур, каждая из которых проводит какую-либо линию или выполняет вспомогательное действие (например, меняет систему координат). Процедурами Шпаги можно пользоваться в различных языках программирования, в том числе в языках Робик, Рапира, Алгол, Поплан и Паскаль. Шпага — это прежде всего учебная система, поэтому названия и параметры ее процедур*) выбирались так, чтобы их было легко запомнить и понять. Кстати, название самой системы расшифровывается так:

Школьный Пакет Графических процедур, Адаптированный

С чего начинается рисунок?

Для того, чтобы машина нарисовала такой пароходик, как на рисунке 1, ей надо дать задание.

Во-первых, следует определить место для рисунка, т. е. задать рамку нужного размера (например, 100 на 100 мм). После этого необхо-

*) Если слова «процедура» и «параметр» показались вам незнакомыми, посмотрите материалы первых уроков Заочной школы программирования («Квант», 1979, №№ 9—11).

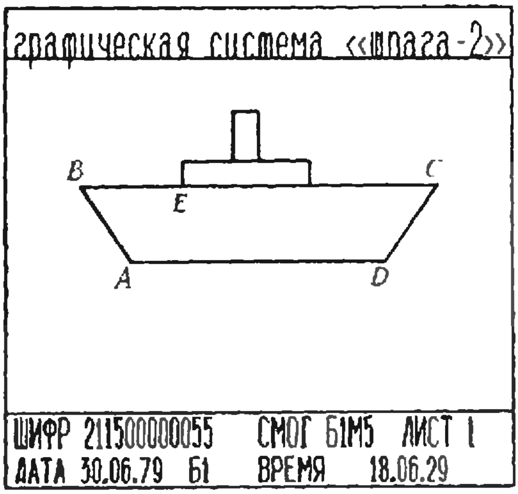


Рис. 1

димо подвести перо или другой рисующий инструмент в точку A, провести отрезок в точку B, в точки C и D, вновь в точку A. Затем переставить инструмент в точку E и продолжить работу.

Для выполнения этих действий предназначены основные процедуры Шпаги: РАМКА, ПОДВОД, ЛУЧ, ТОЧКА, КРУГ и другие. Например, программа на Рапире для изображения пароходика могла бы выглядеть так: РАМКА (100, 100); ПОДВОД (25, 30); ЛУЧ (15,45); ЛУЧ (85, 45); ЛУЧ (75, 30); ЛУЧ (25, 30); ПОДВОД (35, 45); ЛУЧ (35, 50); ЛУЧ (60, 50); ЛУЧ (60, 45); ПОДВОД (45, 50); ЛУЧ (45, 60); ЛУЧ (50, 60); ЛУЧ (50, 50);. КОНЕЦ;

Опишем подробнее работу графических процедур, встретившихся в этой программе.

Процедура РАМКА (Д, В) играет очень важную роль в нашей системе, с нее должна начинаться любая программа, в которой используются процедуры Шпаги. Параметры Д и В в этой процедуре указывают размеры рамки в миллиметрах (Д — длина, В — высота). Исполняя процедуру РАМКА, машина, во-первых, *нарисует рамку* указанного размера, во-вторых, *напишет* над рамкой и под ней некоторые сведения о рисунке (название графической системы, дату и время исполнения рисунка) и, в-третьих, *установит* внутри рамки стандартную прямоугольную систему координат: единица масштаба — 1 мм, начало координат в левом нижнем углу рамки.

Как работают процедуры ЛУЧ и ПОДВОД, вы уже, вероятно, догадались; процедура ПОДВОД (X, Y) помещает рисующий инструмент (перо графопостроителя) в точку (X, Y), при этом никаких следов на бумаге не остается. Процедура ЛУЧ (X, Y) проводит *отрезок прямой линии* из точки, в которой перед этим находилось перо, в точку (X, Y).

Все рисующие процедуры системы Шпага работают только внутри установленной рамки. Например, если при выполнении процедуры ЛУЧ начальная или конечная точка отрезка (или обе сразу) из-за ошибки программиста оказались за рамкой, то будет нарисована только та часть отрезка, которая находится внутри рамки.

Процедура КОНЕЦ, не имеющая параметров, сообщает машине, что программа закончила работу с графопостроителем. После ее выполнения никакими процедурами Шпаги пользоваться нельзя.

Названия большинства процедур системы можно сокращать. В частности, слова РАМКА, ЛУЧ и ПОДВОД можно сократить до одной буквы: Р, Л и П. В отличие от них, название процедуры КОНЕЦ сокращать нельзя.

В сокращенном виде программа оказывается очень компактной. Например, для изображения самолетика.

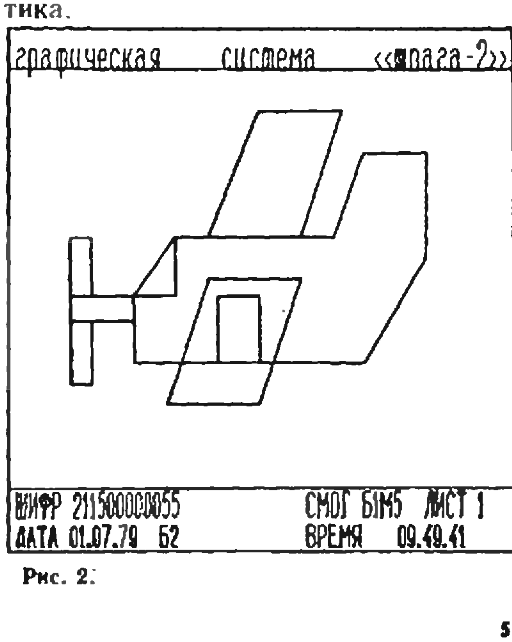


Рис. 2.

достаточно написать*):

Р (120, 100); П (30, 46); Л (15, 46);
Л (15, 40); Л (30, 40); П (20, 46);
Л (20, 60); Л (15, 60); Л (15, 25);
Л (20, 25); Л (20, 40); П (40, 60);
Л (40, 46); Л (30, 46); Л (40, 60);
Л (78, 60); Л (85, 80); Л (100, 80);
Л (100, 55); Л (85, 30); Л (30, 30);
Л (30, 46); П (48, 60); Л (60, 90);
Л (80, 90); Л (70, 60); П (50, 30);
Л (50, 46); Л (60, 46); Л (60, 30);
П (70, 50); Л (48, 50); Л (38,20);
Л (60, 20); Л (70, 50);. КОНЕЦ;

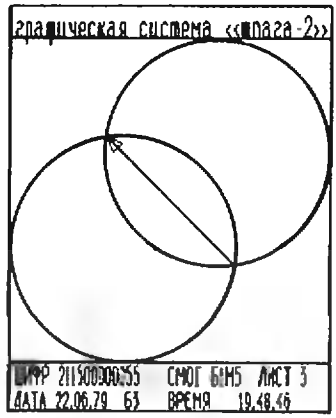


Рис. 4.

Точки, круги, дуги

Процедура ТОЧКА (X, Y) (сокращенно — Т (X, Y) позволяет изобразить в нужном месте рисунка точку. После этого перо остается в точке (X, Y).

Процедура КРУГ (R) рисует окружность радиуса R с центром в точке, в которой перед этим находилось перо. После исполнения процедуры перо возвращается в центр. Сокращенное название этой процедуры — К (R). Например, по программе: Р (100, 100); Т (50, 50); К (10); К (20); К (30); К (40); К (50); КОНЕЦ;

ЭВМ нарисует несколько концентрических окружностей (нечто вроде мишени) с точкой в центре.

Для изображения дуг предусмотрено четыре процедуры: ДУГАЛ, ДУГАП, ДУГАЛБ, ДУГАПБ (сокращенно — ДЛ, ДП, ДЛБ, ДПБ). У каждой из них по три параметра: (X, Y, R). X и Y — это координаты точки, в которой должна закончиться дуга, R — радиус, которым проводится дуга. Так же, как и отрезок в процедуре ЛУЧ, дуга проводится из той точки, где перед этим находилось перо.

Из чертежа 4 видно, что из одной точки в другую заданным радиусом можно провести, как правило, 4 разные дуги: во-первых, больше или меньше полуокружности и, во-вторых, по часовой стрелке или против. Этим четырем случаям и соответствуют четыре процедуры. Буква Б в конце названия означает, что дуга должна быть больше полуокружности; процедуры ДП и ДПБ рисуют дугу против часовой стрелки, то есть справа от вектора, проведенного из начальной точки дуги в конечную (отсюда название ДП — «дуга правая»), процедуры ДЛ и ДЛБ рисуют дугу слева от вектора, то есть по часовой стрелке. В качестве примера приведем программу для рисунка 4:

Р (100, 100); П (70, 30); Л (30, 70); Л (33, 70); Л (30, 67); Л (30, 70); П (70, 30); ДП (30, 70, 35); П (70, 30); ДЛ (30, 70, 35); П (70, 30); ДПБ (30, 70, 35); П (70, 30); ДЛБ (30, 70, 35); КОНЕЦ;

Если задан слишком маленький радиус, то дуга не будет нарисована, при этом система отпечатает сообщение:

ОШИБКА. РАДИУС МЕНЬШЕ ПОЛОВИНЫ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ.

*) Программа составлена третьеклассницей И. Афанасьевой.

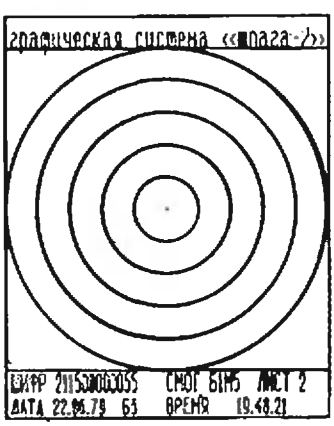


Рис. 3.

Надписи

Очень часто бывает нужно разместить на рисунке какие-нибудь надписи. Для этого в системе Шпага предусмотрены процедуры НАДПИСЬ, НПН и СТРОКА.

Процедура НАДПИСЬ (Т, В, Д) (сокращенно — НП (Т, В, Д)) позволяет изобразить горизонтальную надпись прямыми (вертикальными) буквами. Первый параметр процедуры — это текст, который нужно написать (или имя, значением которого является текст). Точка, в которой находилось перо, считается левым нижним углом надписи. Из этой точки перо начинает рисовать. Параметр В задает высоту надписи, а параметр Д — ее длину.

Процедура НПН (Т, В, Д) работает точно так же, но дает надпись со стандартным наклоном вправо.

Процедура СТРОКА (Т, X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3) позволяет нарисовать текст Т в произвольном положении. Остальные параметры этой процедуры — это координаты трех точек: (X1, Y1), (X2, Y2) и (X3, Y3). В параллелограмм, вершинами которого являются эти точки (четвертую вершину легко достроить), вписывается текст. Первая из перечисленных точек считается левой нижней вершиной параллелограмма, вторая — левой верхней и третья — правой нижней. Манипулируя этими точками, можно получать даже перевернутые и зеркально отраженные надписи.

Во всех этих процедурах надписи выполняются строчными буквами; если же мы хотим получить прописную букву, то перед ней в тексте нужно поставить двоеточие.

Примеры работы описанных процедур приведены на рисунке 5, выполненном по следующей программе:

':КВАНТ' —> А;

Р (100, 100); П (10, 85); НП (А, 10, 30); П (60, 85); НПН (А, 10, 30); СТРОКА (А, 60, 40, 60, 47, 80, 20); СТРОКА (А, 60, 50, 60, 67, 80, 70); СТРОКА (А, 40, 40, 40, 47, 20, 20); СТРОКА (А, 40, 57, 40, 50, 20, 77); .КОНЕЦ;

Изменение системы координат

Систему координат, установленную процедурой РАМКА, можно изменить. Для этого используются процедуры МАСШТАБ, НАЧАЛО, ПОВОРОТ и некоторые другие.

Процедура МАСШТАБ (А) (сокращенно — М (А)) устанавливает новую единицу масштаба, равную А мм.

Процедура НАЧАЛО (X, Y) (сокращенно — Н (X, Y)) переносит начало координат в точку (X, Y) действующей системы; процедура ПОВОРОТ (А) поворачивает систему координат на угол А вокруг действующего начала координат. Угол задается в радианах, при $A>0$ поворот выполняется против часовой стрелки, при $A<0$ — по часовой стрелке.

Если в одной программе несколько раз использовались процедуры НАЧАЛО и ПОВОРОТ, то каждая из них исполняется в системе координат, установленной предыдущей процедурой, и в конце концов бывает трудно определить, какая система координат действует в данный момент. Поэтому предусмотрена не имеющая параметров процедура СБРОС (сокращенно — С), восстанавливающая стандартную систему координат.

От стандартной системы координат можно перейти к полярным координатам при помощи процедуры без параметров ПОЛЯР. В этом случае во всех процедурах Шпаги параметр X считается полярным радиусом, а Y — полярным углом. Для возврата к декартовым (прямоугольным) координатам служит процедура ДЕКАРТ.

Рис. 5.

Мы описали здесь лишь основные процедуры системы Шпага. Используя вместе с ними конструкции различных языков программирования, циклы, описания процедур, условные предписания и т. д., можно получать с помощью системы Шпага самые разнообразные рисунки и чертежи, строить графики сложных функций, изготовлять мультфильмы и выполнять другие графические работы.

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8-й, 9-й и 10-й классы на 1980/81 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал, разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике. Они проходят два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике. Собеседование будет проводиться во второй половине сентября (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте тетрадь в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой Вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу, приведенному ниже.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1980 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1980 года.

Тетрадь с выполненным вступительным заданием (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700,

1. Область (край или АССР)	*Башкирская АССР*
2. Фамилия, имя, отчество	*Басманова Ольга Петровна*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*Наумовская средняя школа*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*бригадир*
мать	*доярка*
6. Подробный домашний адрес	*453081, Стерлитамакский р-н, дер. Наумовка, совхоз-техникум*

г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. I Мая 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительного задания по физике и математике. По физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—10 — для учащихся восьмых классов и задачи 6—12 — для учащихся девятых классов. По математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4 — 10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Льдина плавает на воде. Объем ее надводной части $V_н = 20$ м³. Каков объем всей льдины?

2. Алюминиевая и латунная гири уравновешены в воздухе на аналитических весах, точность взвешивания которых $m_0 = 0{,}1$ мг. При какой массе гирь можно заметить нарушение равновесия весов, если поместить их в вакуумную камеру? Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7$ г/см³, латуни $\rho_2 = 8{,}5$ г/см³, воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м³.

3. В теплоизолированном сосуде находится лед при температуре $t_1 = -5$°C. Какова масса льда, если при введении в сосуд стоградусного водяного пара в сосуде оказалось $m = 300$ г воды при температуре $t_2 = 80$°C?

4. На рисунке 1 изображены две электрические цепи, состоящие из известных сопротивлений $R = 10$ Ом и $2R = 20$ Ом и неизвестного сопротивления r. При каком значении r сопротивлений обеих цепей, измеренные между точками A и B, окажутся одинаковыми и каково при этом общее сопротивление цепи?

5. Три электрические лампочки, рассчитанные на напряжение $U_1 = 110$ В, имеют мощности $P_1 = P_2 = 50$ Вт и $P_3 = 100$ Вт. По какой схеме нужно включить эти лампочки в сеть с напряжением $U_2 = 220$ В так, чтобы все они горели полным накалом?

6. Прибор для изучения законов равноускоренного движения состоит из двух грузов массой $M = 100$ г, связанных невесомой нерастяжимой нитью, которая перекинута через неподвижный блок (рис. 2). На правый груз кладут добавочный груз массой $m = 10$ г, и система начинает двигаться. Когда правый груз пройдет расстояние $s = 1$ м, добавочный груз подхватывается специальным упором, а основные грузы продолжают двигаться далее с постоянной скоростью $|\vec{v}| = 0{,}99$ м/с. Найдите ускорение свободного падения g по результатам данного опыта.

7. Водометный катер движется следующим образом: он забирает забортную воду и выбрасывает ее назад со скоростью $|\vec{V}| = 10$ м/с относительно катера, двигаясь при этом со скоростью $|\vec{v}| = 5$ м/с. К катеру на длинном тросе прицепили буксируемое судно, сила сопротивления которого в воде при одинаковой с катером скорости движения равна силе сопротивления катера. Определите скорость буксира, если известно, что силы сопротивления катера и буксируемого судна пропорциональны их скоростям.

8. Подъемное устройство (рис. 3) состоит из однородного стержня длиной $L = 2{,}5$ м и массой $m = 5$ кг. Нижним концом устройство шарнирно соединено со стенкой (может свободно вращаться). Стержень образует с вертикалью постоянный угол благодаря горизонтально натянутому тросу, который соединен со стержнем на расстоянии $l = 2$ м от шарнира. Длина троса $a = 1$ м. Груз массой $M = 50$ кг подвешен в верхней точке стержня. Найдите натяжение троса.

9. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором спутник периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток. Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

10. В реакции синтеза ядер тяжелого (дейтерия) и сверхтяжелого (трития) изото-

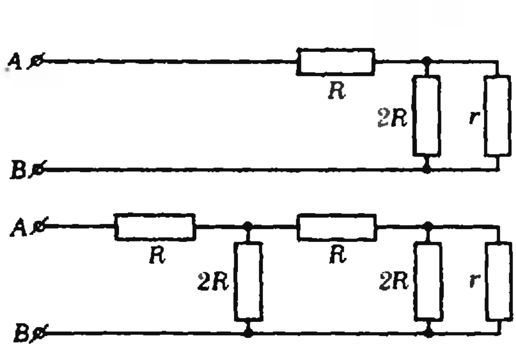


Рис. 1.

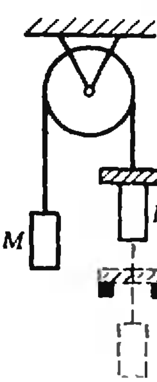


Рис. 2.

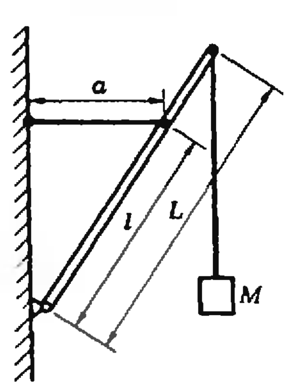


Рис. 3.

пов водорода выделяется энергия. В результате реакции образуется ядро гелия и нейтрон. Какую часть выделившейся энергии уносит нейтрон? Кинетической энергией ядер изотопов водорода до реакции пренебречь. Массы ядер равны: дейтерия — $3{,}32 \cdot 10^{-24}$ г, трития — $4{,}98 \cdot 10^{-24}$ г, гелия — $6{,}64 \cdot 10^{-24}$ г; масса нейтрона равна $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г.

11. Сосуд наполнен смесью азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление равно p. При температуре $2T$, когда оба газа полностью распались на атомы, давление в сосуде $3\ p$. Каково отношение числа молей атомов азота и водорода в смеси?

12. Какое количество теплоты необходимо сообщить комнате объемом $V = 40$ м³, чтобы увеличить ее температуру от $t_1 = 10°C$ до $t_2 = 20°C$. Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ Дж/(моль·К). Атмосферное давление $p = 0{,}1$ МПа.

Математика

1. Четыре ученика: Витя, Петя, Юра и Сергей заняли на математической олимпиаде четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а) Петя — второе, Витя — третье;
б) Сергей — второе, Петя — первое,
в) Юра — второе, Витя — четвертое.

Указать, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть.

2. В выпуклом четырехугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшее значение.

3. Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Определить знак коэффициента c.

4. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) для того чтобы число $n^5 - n (n > 1)$ делилось на 24, достаточно, чтобы натуральное число n было нечетным;

б) для того чтобы число $n^5 - n (n > 1)$ делилось на 24, необходимо, чтобы натуральное число n было нечетным.

5. Выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии. Доказать, что верно по крайней мере одно из следующих утверждений:

а) вокруг четырехугольника можно описать окружность;

б) в четырехугольник можно вписать окружность.

6. В треугольнике ABC P — точка пересечения медиан. Доказать, что при любом выборе начальной точки O

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

7. При каких значениях a и b многочлен

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$$

можно представить в виде

$$P(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2?$$

8. Дано, что n и k — натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

а) $n + 1$ делится на k,
б) $n = 2k + 5$,
в) $n + k$ делится на 3;
г) $n + 7k$ — простое число

три верных, а одно неверное. Найти все возможные пары $(n; k)$.

9. Доказать, что площадь квадрата, вписанного в треугольник (одна сторона квадрата лежит на стороне треугольника), не превосходит половины площади треугольника.

10. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встрече с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

11. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла, на конгруэнтные части.

12. Доказать, что уравнение

$$x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$$

имеет два корня: один — отрицательный, другой — положительный.

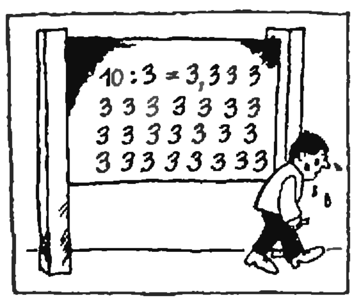
13. Дана непрерывная функция $\varphi(x)$. При каком необходимом и достаточном условии функция

$$f(x) = |x - a|\,\varphi(x)$$

дифференцируема в точке $x = a$.

В. Асланян,
С. Коршунов,
Т. Чугунова

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



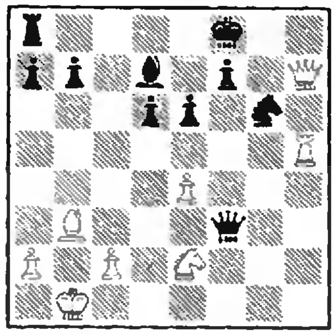
«Альфа» 73 — № 3

Поздравляю читателей „Кванта" с открытием „Шахматной странички". Желаю вам успехов в учебе, и занятиях математикой, физикой и ... шахматами.

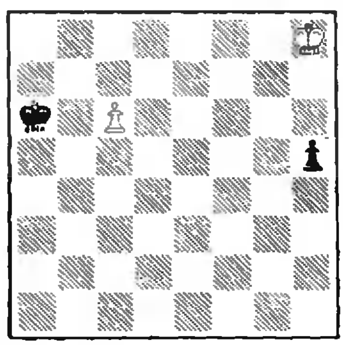
Если вы увлекаетесь математикой и физикой, то скорее всего являетесь и поклонником шахмат, любите играть в них, охотно решаете задачи и этюды. Вот почему, начиная с этого номера, в «Кванте» открывается постоянная «Шахматная страничка». Надеемся, что ее чтение станет для вас приятной и полезной разрядкой после решения задач по математике и физике. На этой страничке вы найдете различные шахматные задачи, этюды, окончания партий, шахматные головоломки. Конечно, учитывая круг читателей, мы будем стремиться к тому, чтобы предлагаемые позиции содержали какой-нибудь математический элемент, геометрическую идею. Здесь вы познакомитесь также с эффектными комбинациями из партий мастеров, получите краткую информацию о событиях, происходящих в шахматном мире. Вести страничку будет Евгений Гик, консультировать — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер, главный редактор журнала «Шахматное обозрение 64» Анатолий Карпов.

Мы не случайно обратились к А. Карпову с просьбой консультировать «Шахматную страничку» именно в нашем журнале. В свое время он окончил математическую школу в г. Туле с золотой медалью, был призером областной математической олимпиады, но... в дальнейшем избрал своей специальностью не математику, а шахматы. Нельзя сказать, что Анатолий полностью отошел от математики. Он окончил с отличием экономический факультет ЛГУ, а, как вы знаете, экономика и математика тесно связаны между собою.

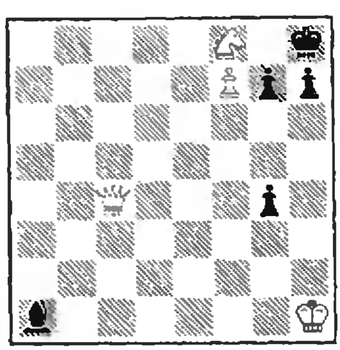
Евгений Гик — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук, наш постоянный автор. Вероятно, многие с удовольствием прочитали его книгу «Математика на шахматной доске».



1. А. Карпов — Е. Гик. Белые выигрывают.



2. Р. Рети. Белые начинают и делают ничью.



3. С. Лойд. Мат в 3 хода.

Задачи

Позиция № 1 возникла в одной из партий чемпионата МГУ 1968 года. Белыми играл тогдашний студент первого курса мехмата молодой мастер Анатолий Карпов, а черными выпускник мехмата Евгений Гик. Черные, имея две лишние пешки, были настроены довольно оптимистично. Однако белые нашли эффектное «геометрическое» продолжение, сразу решившее судьбу партии в их пользу (в результате победитель стал чемпионом МГУ, а проигравший занял второе место). Этим поединком открывается вышедший в 1978 году сборник избранных партий чемпиона мира.

Этюд № 2 представляет собой классический пример, иллюстрирующий необычные геометрические свойства шахматной доски. Парадоксально, но белым удается остановить неудержимую, на первый взгляд, неприятельскую пешку.

Задача № 3 принадлежит выдающемуся шахматному композитору Сэмюэлю Лойду, который известен также как один из величайших мастеров в жанре занимательных математических задач и головоломок, автор популярной игры «15». (В «Кванте» нередко печатались различные игры и задачи, придуманные С. Лойдом; с его шахматно-математическими задачами вы можете ознакомиться в № 6 за 1976 г.) Хотя данная задача чисто шахматная, но и она содержит некоторый геометрический мотив.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант

1. Обозначим скорость пешехода, вышедшего из A, через v_1, вышедшего из B — через v_2, искомое расстояние — через x. Поскольку в условии задачи не уточнено, по какую сторону от середины пути находился второй пешеход, когда пешеход, вышедший из A, прошел $\frac{1}{3}$ пути, и по какую сторону от второго пешехода находился первый пешеход, когда пешеход, вышедший из B, прошел половину пути, расстояния надо выражать при помощи модуля:

$$\begin{cases} \left| \dfrac{\frac{x}{3}}{v_1} \cdot v_2 - \dfrac{x}{2} \right| = 3, \\ \left| \dfrac{\frac{x}{2}}{v_2} \cdot v_1 - \dfrac{x}{2} \right| = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$3\left| \frac{1}{\frac{v_2}{v_1}} - 1 \right| = 4\left| \frac{\frac{v_2}{v_1}}{3} - \frac{1}{2} \right|.$$

Дальше надо решить уравнение $3\left|\frac{1}{y} - 1\right| = \left|\frac{y}{3} - \frac{1}{2}\right|$, рассмотрев три случая: $0 < y \leqslant 1$, $1 < y \leqslant \frac{3}{2}$, $y > \frac{3}{2}$.

Ответ. $\{12$ км, $15 + 3\sqrt{17}$ км, 6 км$\}$.

2. Пусть $SABC$ — данная пирамида (S — вершина). Опустим из C перпендикуляр на (AS). Его основание F будет лежать внутри отрезка AS, если $\widehat{ASC} < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{в этом случае и } \widehat{BFC} < \frac{\pi}{2}\right)$, в точке S, если $\widehat{ASC} = \frac{\pi}{2}$, и на продолжении отрезка AS за точку S, если $\widehat{ASC} > \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{тогда и } \widehat{BFC} > \frac{\pi}{2}\right)$. Обозначим $\widehat{BFC}$ через α. Искомая длина ребра равна $\dfrac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}}$. Однако ее нужно выразить через данный угол между плоскостями φ. Если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \alpha$; если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \pi - \alpha$ («Геометрия 9», § 38).

Ответ. Если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $l = \dfrac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}}$; если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $l = \dfrac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} - 1}}$.

3. $A = 7$, $B = -6$, $C = 3$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Физика

1. $|\vec{F}_д| = |\vec{F}|\,\mathrm{ctg}\,\alpha + mg/2 = 11{,}6$ Н.

2. $A = \dfrac{\eta - 1}{\eta}\,\dfrac{m}{\mu}\,RT_1 = 8{,}3 \cdot 10^5$ Дж.

3. $q = \dfrac{mgl^2}{Ua\left(1 - 1/\sqrt{5}\right)} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ Кл

4. $T = \dfrac{2\pi}{v}\left(\dfrac{a}{Da - 1} - l\right)\sin 2\alpha \approx 20$ с.

Номер готовили
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, Л. Черниевская, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.XI.79
Подписано в печать 20.XII.79
Печать офсетная
Бумага $70 \times 108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. л. 6,35. Т-21573.
Цена 30 коп. Заказ 2737
Тираж 264 513

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

АРИФМЕТИКА ПО-РЫБАЦКИ

Расшифруйте следующие ребусы (здесь в каждом примере одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

В. РАДУНСКИЙ

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта» публикуются задачи по физике и математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант», и получают право участвовать в Республиканских олимпиадах по математике и физике. Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Школьники — авторы лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале.

Задачи должны присылаться вместе с решениями. Каждая задача должна быть представлена на отдельном листе.

Если задача заимствована, то должен быть указан источник, откуда она взята.

По задачам, не принятым к публикации, переписка с авторами не ведется и текст задач авторам не возвращается.

Ждем Ваших писем.

К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).

2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).

3) Статья не должна содержать более 12 машинописных страниц.

4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.